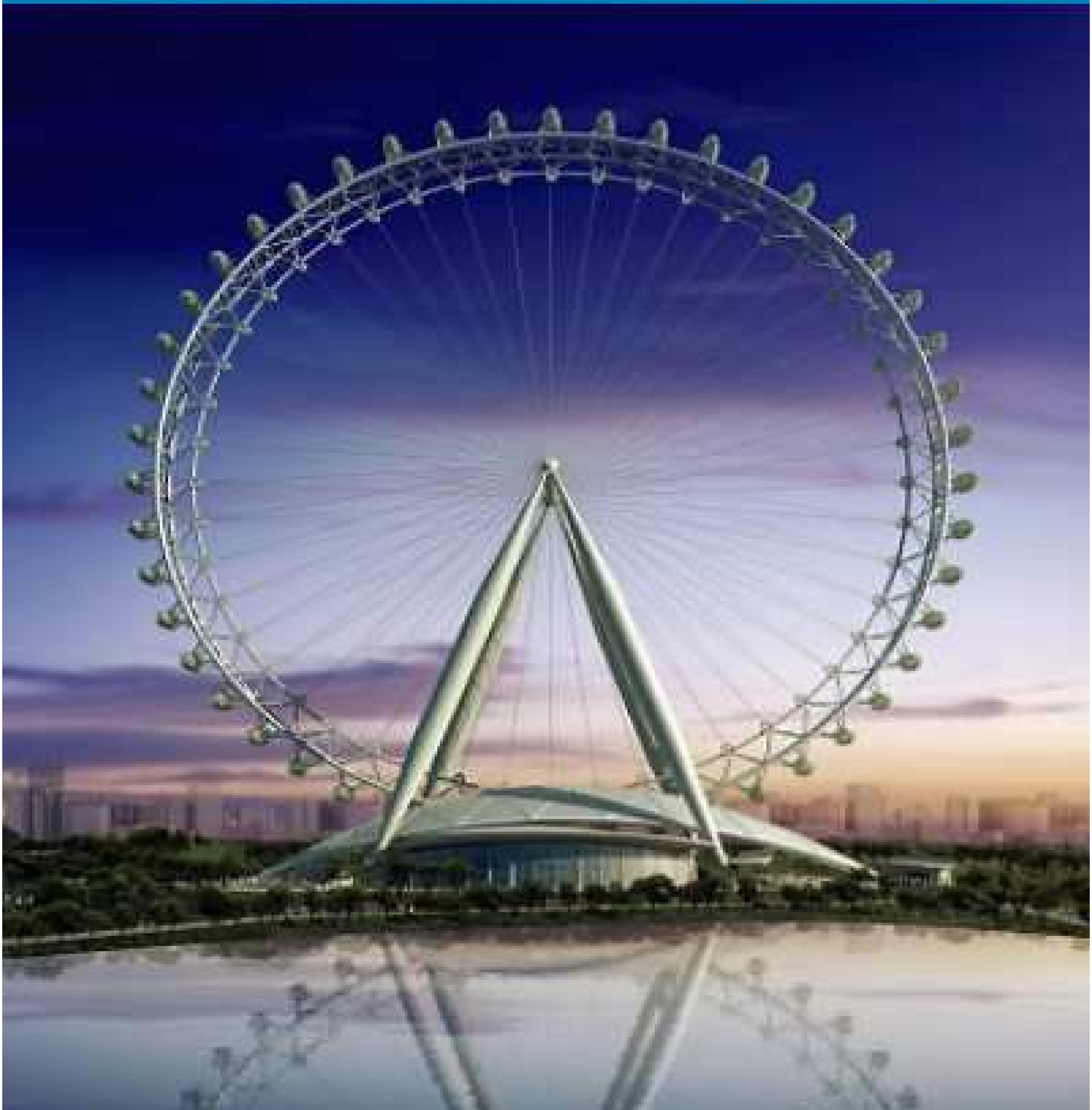
Matemática para Cursos de Graduação

Contexto & Aplicações



Antonio R. Gonçalves

Aos meus pais por terem me proporcionado os estudos, a minha esposa e aos meus filhos por me darem segurança e coragem para superar os desafios.

PREFÁCIO

O ensino de Matemática é indispensável em qualquer curso de graduação, por mais humana que seja a ciência por certo em algum momento ela recorrerá á Matemática ou dependerá de suas ferramentas para provar ou não suas hipóteses. Existem bons livros de Matemática voltados para o Ensino Superior, dentre alguns destacamos aqueles que mencionamos em nossa Bibliografia que são voltados exclusivamente para áreas mais técnicas, mas que não preencher as dificuldades apresentadas pelos alunos ao iniciar um curso de graduação.

A maioria dos cursos superiores das áreas técnicas oferece em sua parte inicial a disciplina de Matemática, visando nivelar o conhecimento do aluno, possibilitando que o mesmo obtenha os conhecimentos necessários ao entendimento e desenvolvimento.

Este livro é fruto de aulas de Matemática Básica e Matemática Aplicada ministradas por vários semestres no curso de Administração. É destinado, sobretudo aos estudantes de curso de graduação das várias áreas profissionais cujo principal objetivo foi dar ao estudante uma visão geral da Matemática, com problemas relacionados com a sua área de atuação, através de exemplos, mas sem descuidar do aspecto formal da disciplina, dando ênfase, a interpretação intuitiva dos conteúdos. Os tópicos introdutórios que apresentamos nesse livro originaram-se, inicialmente, dos problemas que surgiram no dia-a-dia e que continuaram impulsionados pela curiosidade de entender e explicar os fenômenos que regem a natureza.

O livro apresenta a maioria da teoria básica, assim como exemplos aplicados e problemas, procurando sempre não desassociar um conteúdo de outro. Quando um aluno aprende equação, seja ela de qualquer tipo, ao estudar função, dá-se a impressão que é conteúdos completamente diferente, o que na verdade é apenas uma continuação. Neste livro procuramos trazer os conteúdos em seqüência, pois quando um aluno estudo equação do segundo grau, imediatamente ele irá estudar a função do segundo grau e todas a suas possíveis aplicações através de exemplos práticos e voltados para a sua formação.

A fixação dos conteúdos é obtida através de um grande número de exercícios, sendo que, após cada conteúdo, existem exemplos resolvidos para, em seguida, apresentar os problemas propostos, acompanhados das respectivas respostas, de modo que o próprio aluno possa acompanhar com segurança a validade do raciocínio desenvolvido e a correção dos cálculos efetuados. Os exercícios propostos foram dispostos em ordem crescente de dificuldade (segundo a visão do autor).

Quanto à redação dos capítulos, no primeiro destacamos a importância da Teoria dos Conjuntos. Sabemos que a matemática exige uma linguagem adequada para o seu desenvolvimento. Daí o motivo da importância de termos certa noção da teoria dos conjuntos. Ela nos fornece os principais elementos para a linguagem que é aplicada em diversos ramos da matemática e também será útil em modelos matemáticos desenvolvidos em outras ciências.

No segundo e terceiro capítulo damos início a um dos mais importantes conteúdos de Matemática: As Funções. O estudo de função não é restrita apenas aos interesses da Matemática, as funções fazem parte do nosso cotidiano e estão presentes na realização das coisas mais elementares que fazemos. Para dar início ao estudo de função é necessário que tenha o conhecimento de equações, pois todo o desenvolvimento algébrico de uma função é resolvido através de equações.

Neste capitulo é apresentada a maior parte dos conteúdos, que irão permear todos os demais capítulos seguintes, destacamos as funções do primeiro grau aplicadas à economia como: função custo, função receita, função lucro, função demanda, função oferta, entre outras.

Nos capítulos 4 e 5 e 6 são apresentadas as equações e funções do segundo grau, exponencial e logarítmicas. As funções logarítmicas juntamente com suas inversas, as funções exponenciais, constituem modelos ideais para descrever matematicamente certos fenômenos de variação nos quais uma grandeza tem taxa de variação proporcional a quantidade daquela grandeza existente em cada instante.

Os capítulos 7, 8 e 9 destacamos a utilização de matrizes, determinantes e sistemas lineares essenciais em cursos de programação. Na administração, as matrizes e os determinantes são constantemente utilizados. Pois se trata de tabelas de números que são ferramentas importantíssimas na análise do desempenho da empresa ou na análise das vendas, finanças ou qualquer outra observação que se deseja fazer.

No capitulo 10, destacamos importância dos conceitos relacionados à Probabilidade. Na formação dos alunos esse conceito é fundamental, o aluno precisa entender o significado de cada conceito sem o conceito, ele não tem a base fundamental.

Finalmente, nos capítulos 11 e 12 temos a parte de Limites e Derivadas. Destacamos as operações com limites e as regras de derivação bem como suas aplicações nas funções de custo marginal, receita marginal e lucro marginal.

O propósito de escrever esse livro foi o de oferecer um material que facilitasse ao máximo a aprendizagem de Matemática. A idéia é não travar o entusiasmo do estudante ao ingressar num curso superior, colocando-lhe barreiras instransponíveis.

Acreditamos, entretanto, que os desenvolvimentos dos exercícios apresentados é suficiente para um bom entendimento e sua aplicabilidade.

O presente livro não exige pré-requisitos, possuindo uma linguagem de fácil acesso a qualquer estudante de nível superior (ou até mesmo de nível médio).

Outrossim, queremos agradecer a todos os alunos que, assistindo as aulas, fazendo os exercícios, corrigindo as falhas, contribuíram para este livro através de criticas e comentários.

Antonio Roberto Gonçalves

Autor

CAPÍTULO I - TEORIA DOS CONJUNTOS

"*O produto mais extraordinário do pensamento matemático, uma das mais belas realizações da atividade humana no domínio do puramente inteligível".*

(David Hilbert, ao se referir a George Cantor**).**

George Cantor, matemático, nascido em São Petersburg, Rússia, viveu grande parte de sua vida na Alemanha. Aos onze anos, seus pais, de origem dinamarquesa, transferiram-se para Frankfurt. Cantor foi um homem interessante pelas deduções perspicazes dos teólogos medievais sobre a continuidade e o infinito. Seu pai deseja que seguisse a Engenharia, entretanto em seus estudos em Zurick, Göttinge e Berlin concentrou-se em Filosofia, Física e Matemática. Destacou-se em Berlim, em 1867, com uma tese sobre a teoria dos números. Suas contribuições mais significativas centraram-se na provocativa palavra "infinito".

George Cantor

Desde Zeno (450 A.C.0 que se falava em infinito, tanto na teologia quanto na Matemática, porém, ninguém antes de 1872 fora capaz de dizer exatamente o que se estava falando. Tal fato contribuiu pra que sua adoção fosse tardia em Matemática.

Dedicando-se à pesquisa na área de análise matemática, Cantor acabou tendo sua atenção atraída para o assunto com o qual tinha afinidade: a natureza dos conjuntos infinitos. E de sua opção por esse assunto nasceria a Teoria dos Conjuntos como um capítulo independente da Matemática, ramo que, em meados do século XX, teria efeitos profundos sobre o ensino da Matemática.

Cantor e Dedeking estavam entre os matemáticos mais notáveis de sua época, no entanto nenhum dos dois conseguiu uma posição profissional de destaque. Cantor passou a maior parte de sua carreira na Universidade de Halle.

Em 1884, Cantor sofreu o primeiro esgotamento nervoso e, durante o restante de sua vida, apresentava acessos de depressão que o levavam às vezes, a duvidar de sua própria obra. Quase no final, ele obteve o reconhecimento de suas realizações, mas sua morte em 1918, numa instituição de Halle, faz lembrar que a genialidade e a loucura estão relacionadas.

CONJUNTOS

A Teoria dos Conjuntos, criada pelo matemático Georg Cantor, tornou-se o elemento central da estruturação do conhecimento matemático. Como a idéia era muito abstrata e difícil de ser representada, o lógico inglês John Venn idealizou uma forma simplificada para demonstrar, que são os diagramas. A todo o momento lidamos com a formação de conjuntos, seja por aspectos cotidianos, culturais ou científicos. Ao organizarmos nossas roupas, a lista de amigos ou o timinho de futebol, estamos formando conjuntos.

Conjunto é a reunião de pessoas seres ou objetos que possuem as mesmas características.

É a reunião de elementos que formam o todo, e nos dá idéia de coleção. Pomar é um conjunto de árvores frutíferas, onde pomar é o todo e árvore frutífera é o elemento.

Exemplo:

- Conjunto dos Estados do Brasil;
- Conjunto das notas musicais;
- Conjunto dos animais mamíferos.
- Conjunto dos meses do ano

Um conjunto é formado por *elementos*. Se um objeto qualquer pode ser elemento de um determinado conjuntos, dizemos que esse objeto é elemento do conjunto.

Nos exemplos acima, temos:

- Paraná é um Estado do Brasil, portanto Paraná é um elemento do conjunto dos Estados do Brasil;
- Fá é uma nota musical, portanto Fá é um elemento do conjunto das notas musicais;
- Baleia é um mamífero, portanto a baleia é um elemento do conjunto dos animais mamíferos.
- Outubro é um mês do ano, portanto outubro é um elemento do conjunto meses do ano.

REPRESENTAÇÃO DE UM CONJUNTO

Os conjuntos são representados por letras maiúsculas do alfabeto A, B, C, X, Y, etc., entre chaves e os elementos por letras minúsculas a, b, c, x, y, etc. separados por vírgulas.

Por exemplo:

- Conjunto das vogais do alfabeto: V = {a, e, i, o, u}
- Conjunto dos dias da semana: A={domingo, segunda, terça, quarta, quinta, sexta, sábado}.
- Conjunto dos números pares: P = {0, 2, 4, 6, 8, 10,...}

COMO REPRESENTAR CONJUNTOS

Vamos considerar o conjunto dos divisores naturais do 10.

Este conjunto pode ser representado por três formas:

1º. Pelos elementos

Escrevemos seus elementos entre chaves, separados por vírgulas e sem repetição, de preferência obedecendo a ordem crescente dos números.

D = {1, 2, 5, 10}

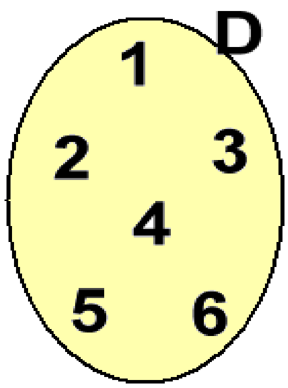
2º. Pela Característica

Escrevemos o conjunto enunciando uma propriedade ou característica comum de seus elementos.

D = {x/ x são os divisores naturais do dez}

3º. Pelo diagrama de Venn

Os elementos do conjunto são colocados dentro de uma figura em forma de elipse, chamada diagrama de Venn.



IGUALDADE DE CONJUNTOS

Definição: Dois conjuntos A e B dizem-se iguais (ou idênticos) se constam exatamente dos mesmos elementos e, nesse caso, escrevemos A = B. Se um dos conjuntos contém algum elemento que não pertence ao outro, dizemos que os dois conjuntos são distintos e escrevemos A ≠ B.

Exemplo:

- Seja $E = \{x \in IN / x^2 - 3x + 2 = 0\}$, F = {1, 2} e G = {2, 1}. Então E = F = G

Note que a igualdade do conjunto não depende da disposição dos elementos no conjunto.

TIPOS DE CONJUNTOS

CONJUNTO UNIVERSO

O Conjunto Universo é a reunião de todos os conjuntos a serem estudados no contexto em que estamos trabalhando.

Exemplos:

- Quando falamos sobre biologia, o Conjunto Universo será todos os seres vivos;
- Quando falamos sobre os números naturais, o Conjunto Universo será todos os números inteiros positivos.
- Na resolução de equações um dos conjuntos mais importantes é o conjunto dos números Reais que reúne vários outros conjuntos numéricos.

CONJUNTO VAZIO

O Conjunto vazio é o conjunto que não possui elementos. Representa-se o Conjunto Vazio por: { } ou Ø.

Exemplo:

- Seja A = {x / x é natural e menor que 0}

  Este conjunto é vazio, pois não existe número natural negativo.
- Conjunto dos países da África que iniciam pela letra M.

  Este conjunto é vazio, pois não existe país da África cujo nome se inicia pela M.

CONJUNTO UNITÁRIO

Esse conjunto é caracterizado por possuir apenas um único elemento.

Exemplo:

- O conjunto dos números naturais compreendidos entre 0 e 2.

  Nesse caso existe somente um elemento, o 1. Representamos por {1}.
- O conjunto dos números inteiros compreendidos entre –3 e –1.

  Entre os números –3 e –1 existe apenas o número inteiro –2. Representamos {–2}.

CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS

Finito: quando podemos enumerar todos os seus elementos.

Exemplo: conjunto dos Estados da Região Sul do Brasil.

S = {Paraná, Santa Catarina, Rio Grande do Sul}

Infinito: quando não podemos enumerar todos os seus elementos

Exemplo: conjunto dos números naturais.

IN = {0, 1, 2, 3 ,4, 5, 6, 7, 8, 9, ...}

RELAÇÃO DE PERTINÊNCIA

O conceito básico da Teoria dos Conjuntos é a relação de pertinência representada pelo símbolo $\in$ (pertence) ou $\notin$ (não pertence).

- Para indicarmos que um elemento **a** pertence ao conjunto P, escrevemos: a $\in$ P (lê-se: elemento **a** pertence ao conjunto P).
- Para indicarmos que um elemento **a** não pertence ao conjunto P, escrevemos: a $\notin$ P (lê-se: elemento **a** não pertence ao conjunto P)

Exemplo:

Seja o conjunto A = {2, 6, 8, 9, 10}

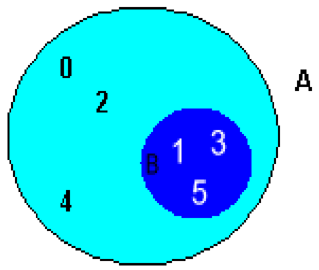
- 2 $\in$ A, 8 $\in$ A, 9 $\in$ A
- 1 $\notin$ A, 5 $\notin$ A, 7 $\notin$ A

SUBCONJUNTOS

Quando todos os elementos de um conjunto A são também elementos de um outro conjunto B, diz-se que A é subconjunto de B.

Exemplo:

Dados os conjuntos B = {0, 1, 2, 3 ,4 ,5} e A = {1, 3, 5}, vemos que todos os elementos do conjunto A pertencem ao conjunto B, então podemos afirmar que A é subconjunto de B.



Podemos simplificar a definição dizendo que subconjunto é quando de um conjunto maior podemos formar vários conjuntos menores, mas com as mesmas características.

Seja o conjunto C = {a, b, c}, podemos formar os seguintes subconjuntos:

- {a}, {b} {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}, { } = 8 subconjuntos

Tome Nota:

- Todo o conjunto A é subconjunto dele próprio
- O conjunto vazio, por convenção, é subconjunto de qualquer conjunto.
- O conjunto das partes é o conjunto formado por todos os subconjuntos de A.

No exemplo acima o conjunto das partes é: B = {{a}, {b} {c}, {a, b}, {a, c}, {b, c}, {a, b, c}, { },}

RELAÇÃO DE INCLUSÃO

A relação de Inclusão deve ser usada exclusivamente de conjunto para conjunto e verifica se um conjunto é subconjunto ou não de outro conjunto.

Para representar a relação de inclusão utilizam-se os símbolos:

$\subset \rightarrow$ Leia-se: está contido $\not\subset \rightarrow$ Leia-se: não está contido

$\supset \rightarrow$ Leia-se: contém $\not\supset \rightarrow$ Leia-se: não contém

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÕES

1. Dados os conjuntos X = {x / x é as letras do alfabeto}, B= {b / b é as vogais do alfabeto} e C= {c / c é as consoantes do alfabeto}, coloque V ou F para as sentenças abaixo:

a) c $\notin$ B ( )

b) B $\subset$ X ( )

c) {a, b, c, d, e } é subconjunto de C ( )

d) B $\subset$ C ( )

e) X $\not\subset$ B ( )

f) b $\in$ C ( )

g) k, w, y $\in$ C ( )

2. Represente pelos elementos e pelo diagrama de Venn o conjunto P = {x / x são as raízes da equação $x^2 - 17x + 72 = 0$} Resposta: {8, 9}

3. Se n é o número de subconjuntos não-vazios do conjunto formado pelos múltiplos estritamente positivos de 5, menores do que 40, então o valor de n é: Resposta: 127

4. Escreva todos os subconjuntos do conjunto M = {x / x são os números naturais divisores de 15}.

5. Quais das proposições são verdadeiras?

a) {1,2} $\subset$ {1,2}

b) {1,2} $\in$ {1,2}

c) a $\notin$ {b,a}

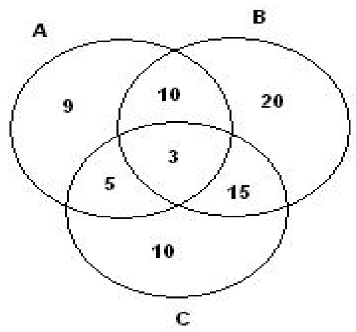
d) $\varnothing \subset$ {a, b, c, d, e}

e) {a} $\subset$ {b,a}

f) 2 $\subset$ {1,2,3}

g) {1,2,3} $\subset$ {1,2,2,3,3}

6. Escreva os elementos dos conjuntos A, B e C no diagrama abaixo.



7. Represente pelo diagrama de Venn o conjunto D = {x / x são os números naturais primos menores que 20}.

8. Escreva o conjunto dado pelas seguintes condições:

a) P = {x / x é a solução da equação 5x + 20 = 45}

b) A = {x $\in$ Z / - 4 < x < 4}

c) Ç = {x /x são os múltiplos de 5 menores que 30}

d) O = {x / x são os planetas do sistema solar}

e) C = {x / x é a solução da equação x^2 -1024 = 0}

f) A = {x $\in$ Z / x < -2}

9. Seja A = {3, 5, 7, 9, 11, 15}, qual das representações abaixo é correta.

a) {x $\in$ A / x é impar}

b) {x $\in$ A / x é múltiplo de 5}

c) {x $\in$ A / x é divisor de 60}

d) {x $\in$ A / x é divisível por 2}

10. Dado o conjunto {a, b, c, d, e} o número máximo de subconjuntos distintos é: Resposta: 32

11. Dado os conjuntos: A = {x / x são as raízes da equação $x^2+7x+12=0$}, B = { 2, 5, 7, 8} e C = {x $\in$ Z / - 4 $\leq$ x < 2}. Complete com $\in$, $\notin$ $\subset$ e $\not\subset$

a) 2........................C

b) 5 e 6..................B

c) {-4, -3}...............A

d) {0, 1, 2, 3}.........C

e) 7..................B

f) { }..............C

g) C.................A

h) 0..................B

Operações com Conjuntos

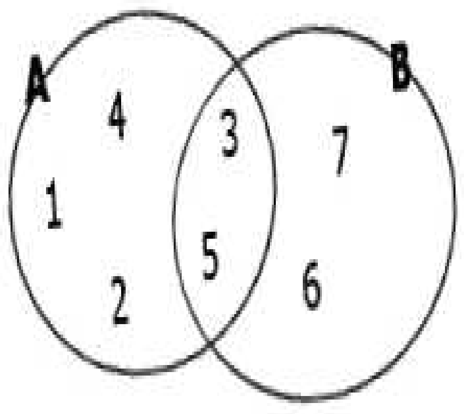
Operação União ($\cup$)

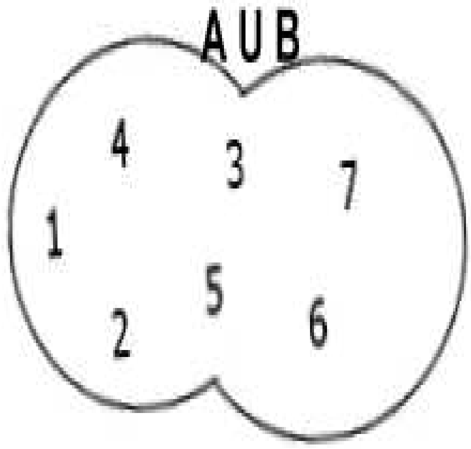
Dados dois conjuntos A e B, não vazios, a União dos conjuntos A e B é um novo conjunto formado por todos os elementos que pertencem ao conjunto A e ao conjunto B.

Exemplo:

Seja os conjuntos A = { 1, 2, 3, 4, 5} e B = {3, 5, 6, 7}, determine A $\cup$ B.

A $\cup$ B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, }





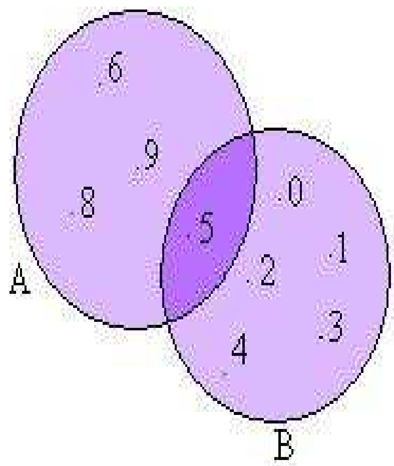
Operação Intersecção ($\cap$)

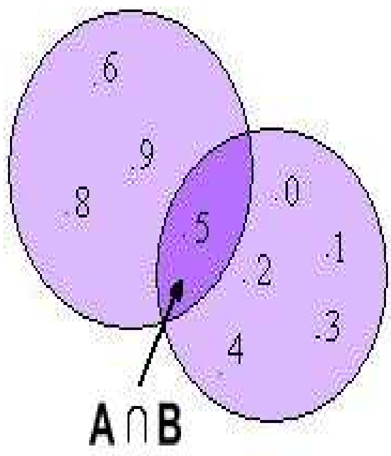
Dados dois conjuntos A e B, não vazios, a Intersecção dos conjuntos A e B é um novo conjunto formado por todos os elementos que pertencem ao conjunto A e ao conjunto B ao mesmo tempo.

Exemplo:

Seja os conjuntos A = {5, 6, 8, 9} e B = {0, 1, 2, 3, 4, 5}, determine A $\cap$ B.

A $\cap$ B = {5}





OPERAÇÃO DIFERENÇA (-)

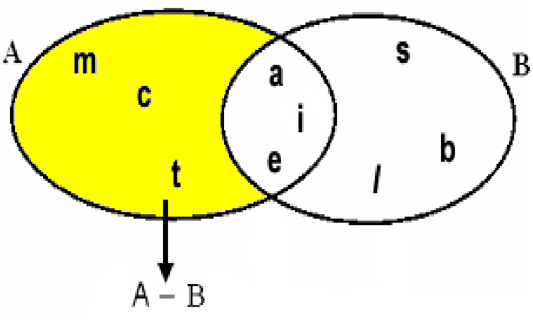
Dados dois conjuntos A e B, não vazios, a Diferença dos conjuntos A e B é um novo conjunto formado pelos elementos que pertencem ao conjunto A, mas não pertencem ao conjunto B.

Exemplo:

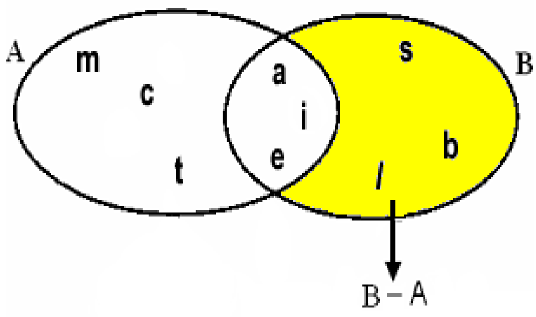
Seja os conjuntos A = {x / x são as letras da palavra MATEMÁTICA} e B = {x / x são as letras da palavra ISABELLE}, determine A – B.

A = { m, a, t, e, i, c} e B = { i, s, a, b, e, l}

A - B = {m, c, t}



B - A = {b, i, s}



Tome Nota:

- Para determinar a diferença entre conjuntos, devemos observar o que o conjunto A tem de diferente de B.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÕES

12. Dados os conjuntos A = {1, 2, 4, 6, 8, 10}, B = {3, 6, 9, 10, 15} e C = {0, 5, 10, 15}, determine:

a) A ∩ B
b) A ∩ (B U C)
c) A ∩ C
d) A ∩ B ∩ C
e) C – A
f) A U B U C
g) B U C
h) (A ∩ B) U (B – A)
i) (A – B) ∩ (C – A)
j) (A ∩ B) ∩ (B U C)
k) (A – B) ∩ (B U C)
l) (B – C) U (A – C) U (B – A)

13. Dados M = {x ∈ Z / -2 < x < 3} e S = {x ∈ Z / -5 ≤ x ≤ 0}, calcule:

a) Determine os números inteiros que pertencem ao conjunto M ∩ S
b) Determine os números inteiros que pertencem ao conjunto M U S
c) Determine os números inteiros que pertencem ao conjunto M – S

14. Sendo os conjuntos M = {x / x é par positivo menor que 10}, I = {x / x é número ímpar compreendido entre 4 e 10}, V = {0, 1, 2, 3, 4, 5} e R = {0, 2, 3, 5}, determine:

a) M – R

b) I – (M U R)

c) V ∩ R ∩ M

d) V U M U I

e) M

f) V ∩ M

g) R – (V ∩ I)

15. Se A , B e A ∩ B são conjuntos com 90, 50 e 30 elementos respectivamente, determine então o número de elementos A U B. Resposta: 110

16. Copie o diagrama no caderno e pinte os conjuntos de acordo com as sentenças.

a) Z – X

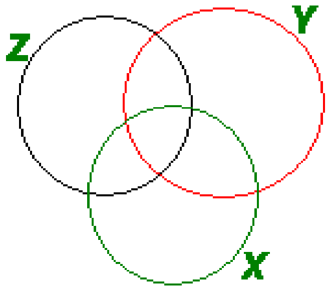
b) X – (Y U Z)

c) Z ∩ X ∩ Z

d) Z ∩ (Y – X)

e) X - (Y ∩ Z)

f) (Y ∩ Z) U (Z ∩ X)



17. Dados os conjuntos:

X= {x / x são os números impares menores que 10},

B= {b / b são os números pares maiores que 5 e menores que 10};

C= {c / c são os números naturais maiores que dois e menores que 8 };

Coloque V ou F para as sentenças abaixo:

a) X U C = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} ( )

b) B ∩ C é um conjunto unitário ( )

c) C – X = {4, 6} ( )

d) X – C = {1, 7, 9} ( )

e) X = {1, 3, 5, 7, 9, 10} ( )

f) X ∩ B é um conjunto vazio ( )

g) B = {5, 6, 7, 8, 9, 10} ( )

h) B – C = {2, 4, 6, 8, 10} ( )

18. Dado o diagrama, classifique as sentenças em Verdadeiro ou Falso.

a) A – B = 14 ( )

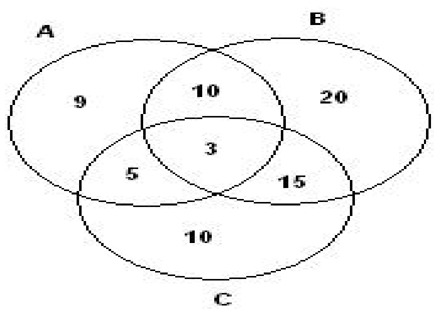
b) A – (B U C) = 9 ( )

c) B ∩ A ∩ C = 8 ( )

d) A U B U C = 75 ( )

e) B = 48 ( )

f) A ∩ C = 23 ( )



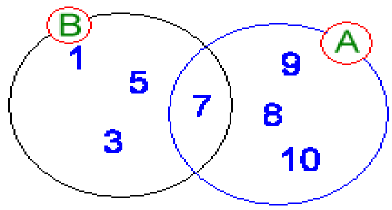
19. Dado o diagrama, determine os seguintes conjuntos, escrevendo seus elementos.

a) A – B

b) B ∩ A

c) B – A

d) A U B



20. São dados os conjuntos A = {x ∈ IN / x é impar}, B = {x ∈ Z / – 3 ≤ x < 4} e C = {x ∈ Z / -1 < x < 6}. Calcule.

a) A =

b) B =

c) C =

d) (A ∩ B) U (B ∩ C) =

e) (A ∩ B) =

f) A – (B U C)

g) B – (A ∩ C)

h) (B – A) ∩ (A – C)

21. Os muçulmanos sequer se limita aos paises de etnia árabe, como muito imaginam. Por exemplo, a maior concentração de muçulmanos do mundo encontra-se na Indonésia, que não é um país de etnia árabe. (Adaptado da Superinteressante, Ed. 169 – out, 2001). Considere T o conjunto de todas as pessoas do mundo; M o conjunto de todas aquelas que são muçulmanas e A o conjunto de todas aquelas que são árabes. Sabendo que nem toda pessoa que é muçulmana é árabe, pode-se representar o conjunto de pessoas do mundo que não são muçulmanas e nem árabe por: Resposta: A

a) T – (A U M)

b) T – A

c) T – (A ∩)

d) (A – M) U (M – A)

e) M – A

f) N.D.A

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS UTILIZANDO CONJUNTOS

Muito dos problemas constituem-se, essencialmente, de perguntas ou tarefas a serem executadas. Para resolvê-los, utilizaremos além das informações contidas nos enunciados, nossos conhecimentos relativos às operações de conjuntos que são: União, Intersecção e Diferença.

EXEMPLO RESOLVIDO

Ex 1: *Analise a seguinte situação: Considere o conjunto V = {1, 2 ,5 ,6, 8 ,9} e M = {0, 1, 3, 4, 6, 7 ,9, 10, 11}, determine:*

a) Quantos elementos têm o conjunto V?
b) Quantos elementos têm o conjunto M?
c) Quantos elementos têm o conjunto V ∩ M?
d) Quantos elementos têm o conjunto V U M?

Resolução:

a) V = {1, 2 ,5 ,6, 8 ,9} » **n(V) = 6**
b) M = {0, 1, 3, 4, 6, 7 ,9, 10, 11} » **n(M) = 9**
c) V ∩ M = {1, 6, 9} » **n(V ∩ M) = 3**
d) V U M = {0, 1, 2 , 3, 4, 5 ,6, 7, 8 ,9, 10, 11} » **n (V U M) = 12**

Então, n(V U M) = 6 + 9 – 3 » n(V U M) = 12.

De modo geral, quando os conjuntos A e B são finitos, é possível provar que:

n(A U B) = n(A) + n(B) – n(A ∩ B)

EXEMPLO RESOLVIDO

Ex 2: *Numa pesquisa sobre a preferência por dois partidos políticos, A e B, obteve-se os seguintes resultados. Noventa e duas disseram que gostam do partido A, oitenta pessoas disseram que gostam do partido B e trinta e cinco pessoas disseram que gostam dos dois partidos. Quantas pessoas responderam a pesquisa?*

Resolução pela Fórmula

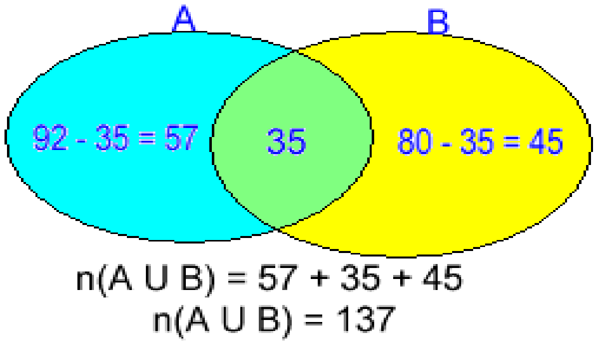
» n(A U B) = n(A) + n(B) – n(A ∩ B)

» n(A U B) = 92 + 80 – 35

» n(A U B) = 137

Resolução pelo diagrama:

- Se 92 pessoas responderam gostar do partido A e 35 delas responderam que gostam de ambos, então o número de pessoas que gostam somente do partido A é:
  92 – 35 = 57.



- Se 80 pessoas responderam gostar do partido B e 35 delas responderam gostar dos dois partidos, então o número de operários que gostam somente do partido B é:
- 92 – 35 = 57.
- Se 57 gostam somente do partido A, 45 responderam que gostam somente do partido B e 35 responderam que gostam dos dois partidos políticos, então o número de pessoas que responderam a pesquisa foi: 57 + 35 + 45 = 137.

No caso de três conjuntos A, B e C, dá mesma maneira, pode-se provar que a fórmula que indica o número de elementos da de n(A U B U C) é:

n(A U B U C) = n(A) + n(B) + n(C) + n(A ∩ B ∩ C) - n(A ∩ B) - n(A ∩ C) - n(B ∩ C)

EXEMPLO RESOLVIDO

Ex 3: *Objetivando conhecer a preferência musical dos seus ouvintes, certa emissora de rádio realizou uma pesquisa, dando como opção três compositores: Amado Batista (A), Benito de Paula (B) e Caetano Veloso (C). Os resultados são:*

Votos	***Opções***
201	Gostam de A
253	Gostam de B
244	Gostam de C
36	Gostam de A e B
44	Gostam de B e C
52	Gostam de A e C
7	Gostam de A, B e C
85	Nenhum

Calcule quantas pessoas responderam a pesquisa.

Resolução pela Fórmula

» n(A U B U C) = n(A) + n(B) + n(C) + N + n(A ∩ B ∩ C) - n(A ∩ B) - n(A ∩ C) - n(B ∩ C)

» n(A U B U C) = 201 + 253 + 254 + 7 + 85 – (36 + 44 + 52)

» n(A U B U C) = 800 – 132

» n(A U B U C) = 668

Resolução pelo diagrama:

» Começamos sempre colocando o número de elementos da intersecção.

» Ao colocar o número de elementos de um conjunto, não podemos esquecer de descontar os da intersecção.

» $n(A \cap B) - n(A \cap B \cap C) = 36 - 7 = 29$

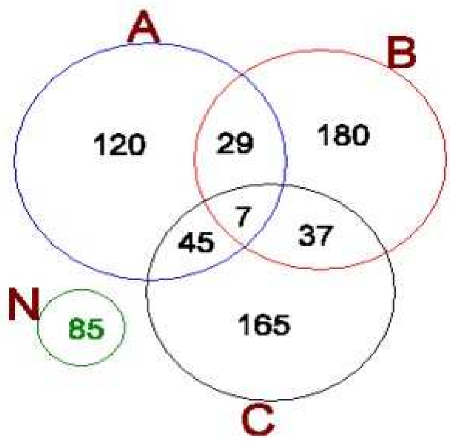
» $n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C) = 44 - 7 = 37$

» $n(A \cap C) - n(A \cap B \cap C) = 52 - 7 = 45$

» 201 – 29 – 7 – 45 = 120

» 253 – 29 – 7 – 37 = 180

» 254 – 45 – 7 – 37 = 165



Assim o número total de pessoas é a soma de todos os valores obtidos:

120 + 29 + 7 + 45 + 180 + 37 + 165 + 85 = 668

Tome Nota:

- A resolução por diagrama é importante, pois ela dá uma visão de todos os valores envolvidos no problema, principalmente quando estão envolvidos três ou mais conjuntos.
- Um processo prático para a resolução por diagrama é começar pela intersecção dos conjuntos e ir resolvendo de dentro para fora.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÕES

22. Numa pesquisa em que foram ouvidas crianças, constatou-se que:

– 15 crianças gostavam de refrigerante.

– 25 crianças gostavam de sorvete

– 5 crianças gostavam de refrigerante e de sorvete

Quantas crianças foram pesquisadas? Resposta: 35 crianças

23. Foram instaladas 66 lâmpadas para iluminar as ruas A e B, que se cruzam. Na rua A foram colocadas 40 lâmpadas e na rua B 30 lâmpadas. Quantas lâmpadas foram instaladas no cruzamento? Resposta: 4 lâmpadas

24. Numa concentração de atletas há 42 que jogam basquetebol, 28 voleibol e 18 voleibol e basquetebol, simultaneamente. Qual é o número de atletas na concentração? Resposta: 52

25. Uma atividade com duas questões foi aplicada em uma classe de 40 alunos. Os resultados apontaram que 20 alunos haviam acertado as duas questões, 35 acertaram a primeira questão e 25, a segunda. Faça o diagrama e calcule o percentual de alunos que acertou apenas uma questão? Resposta: 20 alunos ou 50%

26. Em uma pesquisa com 1.260 consumidores, realizada na cidade de Siqueira Campos, sobre as marcas de refrigerantes Paçokita (P), KitaCola (K) e Gole (G) que é da preferência dos habitantes, obteve o seguinte resultado:

Marcas	P	K	G	P e K	P e G	K e G	P, K e G
Consumidores	540	290	360	70	50	120	30

Calcule: Quantas pessoas não gostam de nenhum dos refrigerantes? Resposta: 280 pessoas

27. Numa pesquisa de mercado sobre a preferência de leitura de uma cidade contatou-se que 48% lêem o gibi do Tex; 45% lêem o gibi do Zagor; 50% lêem o gibi do Ken Parker; 18% lêem os gibis do Tex e do Zagor; 25% lêem os gibi do Tex e do Ken Parker; 15 % lêem os gibis do Zagor e do Ken Parker e 4% dos entrevistados lêem as três revistas. Qual a porcentagem dos entrevistados que não lêem nenhuns desses gibis? Resposta: 11%

28. Uma escola tem 20 professores, dos quais 10 ensinam Matemática, 9 ensinam Física, 7 Química e 4 ensinam Matemática e Física. Nenhum deles ensina Matemática e Química. Quantos professores ensinam Química e Física e quantos ensinam somente Física? Resposta: 3 e 2

29. Uma prova era constituída de dois problemas. Trezentos alunos acertaram somente um dos problemas, 260 acertaram o segundo, cem alunos acertaram os dois e duzentos e dez erraram o primeiro. Quantos alunos fizeram a prova? Resposta: 450 alunos

30. Em um determinado bairro de uma cidade, existem apenas pessoas de cabelos pretos, castanhos e loiros. Sabe-se que o total de habitantes deste bairro é de 300 pessoas, dentre estas, 180 tem cabelos pretos e 70 tem cabelos castanhos, determine o número de pessoas de cabelo loiro. Resposta: 50 pessoas

31. Numa Fábrica com 73 funcionários, foram distribuídos três acessórios de proteção: Botas, Óculos e Luvas. Da seguinte forma:

» 41 receberam Botas;

» 30 receberam Luvas;

» 25 receberam Óculos;

» 9 receberam Botas e Óculos;

» 10 receberam Botas e Luvas;

» 11 receberam Óculos e Luvas;

Qual o número de funcionários que receberam os três equipamentos? Resposta: 7 funcionários

32. Temos aqui os membros da família Gonçalves. Mostraremos aqui grupos dessa família que gostam de determinado tipo de comida:

» Roberto, Flávio, Osmar, Mariane, João, Antonio e Marli gostam de arroz;

» Guerino, Geni, Rosinei, Osmar e Roberto gostam de bife;

» Isabelle, Vinicius, Marli, Rosinei, Gustavo e Roberto gostam de camarão;

Então, quantas pessoas gostam de arroz, bife e camarão? Resposta: Uma pessoa

33. Uma população consome três marcas de sabão em pó: A, B e C. Feita uma pesquisa de mercado, colheram-se os resultados tabelados abaixo:

Marca	A	B	C	A e B	B e C	C e A	A, B C	Nenhuma
Nº de Consumidores	600	400	300	200	100	150	35	115

Pede-se:

a) O número de pessoas consultadas. Resposta: 1.000 pessoas

b) O número de pessoas que só consomem a marca A. Resposta: 285 pessoas

c) O número de pessoas que não consomem as marcas A ou C. Resposta: 250 pessoas

d) O número de pessoas que consomem ao menos duas marcas. Resposta: 280 pessoas

34. Trinta e cinco estudantes estrangeiros vieram ao Brasil. 16 visitaram Manaus; 16 visitaram Rio de Janeiro e 11 visitaram Salvador. Desses estudantes, 5 visitaram Manaus e Salvador e , desses cinco, 3 visitaram também o Rio de Janeiro. O número de estudantes que visitaram Manaus ou Rio de Janeiro foi: Resposta: 29 estudantes

35. Após um jantar, foram servidas as sobremesas X e Y. Sabe-se que das 10 pessoas presentes, 5 comeram a sobremesa X, 7 comeram a sobremesa Y e 3 comeram as duas. Quantas não comeram nenhuma sobremesa? Resposta: Uma pessoa

36. Numa academia de ginástica que oferece várias opções de atividades físicas, foi feita uma pesquisa para saber o número de pessoas matriculadas em alongamento (A), hidroginástica (H) e musculação (M), chegando-se ao resultado expresso na tabela a seguir:

Atividade	H	M	A	A e H	A e M	H e M	Os três	Outras
Nº de Alunos	203	162	109	25	28	41	5	115

Com base nessas informações, determine a soma das afirmativas verdadeiras:

→ (01) - 61 pessoas estavam matriculadas apenas em alongamento.

→ (02) - 259 pessoas estavam matriculadas em alongamento ou musculação.

→ (04) - 89 pessoas estavam matriculadas em pelo menos duas das atividades

→ (08) - A pesquisa envolveu 500 pessoas.

→ (16) - O número de pessoas matriculadas apenas em hidroginástica corresponde a 28,4% do total de pessoas envolvidas na pesquisa. Resposta: 25

37. Depois de n dias de férias, um estudante observa que:

» choveu 7 vezes, de manhã ou à tarde;

» quando chove de manhã não chove à tarde;

» houve 5 tardes sem chuva;

» houve 6 manhãs sem chuva.

Podemos afirmar então que n é igual a: Resposta: 9 dias

38. No último clássico Palmeiras x Flamengo, realizado em São Paulo, verificou-se que só foram ao estádio paulistas e cariocas e que todos eles eram só palmeirenses ou só flamenguistas. Verificou-se também que, dos 100.000 torcedores, 85.000 eram palmeirenses, 84.000 eram paulistas e que apenas 4.000 paulistas torciam para o Flamengo. Pergunta-se:

a) Quantos paulistas palmeirenses foram ao estádio? Resposta: 80.000

b) Quantos cariocas foram ao estádio? Resposta: 16.000

c) Quantos não-flamenguistas foram ao estádio? Resposta: 85.000

d) Quantos flamenguistas foram ao estádio? Resposta: 15.000

e) Dos paulistas que foram ao estádio, quantos não eram flamenguistas? Resposta: 80.000

f) Dos cariocas que foram ao estádio, quantos eram palmeirenses? Resposta: 5.000

39. Segundo o Censo do IBGE no ano 2006, 81% dos brasileiros possuíam televisão, 79% possuíam geladeira, 8% possuíam geladeira e televisão e 4% não tinham TV nem geladeira. Qual o total de brasileiros que possuíam apenas televisão? Resposta: 73%

40. Durante a Segunda Guerra Mundial, os aliados tomaram um campo de concentração nazista e de lá resgataram 979 prisioneiros. Desses 527 estavam com sarampo, 251 com tuberculose e 321 não tinham nenhuma dessas duas doenças. Qual o número de prisioneiros com as duas doenças? Resposta: 120 prisioneiros

41. Um total de sessenta clientes potenciais foi a uma loja de equipamento informático. Deles cinqüenta e dois fizeram compras: vinte compraram papel; trinta e seis compraram pendrive; quinze compraram cartuchos de tinta para impressora; seis compraram simultaneamente papel e pendrive; nove compraram simultaneamente pendrive e cartuchos; cinco compraram simultaneamente papel e cartuchos. Quantos compraram os três artigos? Resposta: um cliente

42. Foi feita uma pesquisa sobre a preferência de um grupo de pessoas por determinado tipo de música, e concluiu-se que: 43 pessoas gostavam de SAMBA; 6 pessoas gostavam apenas de ROCK; 15 pessoas gostavam de SAMBA e ROCK; 8 pessoas gostavam de ROCK e JAZZ; 13 pessoas gostavam de SAMBA e JAZZ; 3 pessoas gostavam apenas de ROCK e JAZZ; 40 pessoas não gostavam de ROCK e ninguém gostava apenas de JAZZ. Nessas condições determine:

a) Quantas pessoas gostavam dos três tipos de música? Resposta: 5 pessoas
b) Quantas pessoas não gostavam de nenhum dos três tipos de música? Resposta: 12 pessoas.
c) Qual o total de pessoas pesquisadas? Resposta: 69 pessoas

43. Em um ciclo de três conferências que ocorreram em horários distintos, havia sempre o mesmo número de pessoas assistindo a cada uma delas. Sabe-se que a metade dos que compareceram à primeira conferência não foi a mais nenhuma outra; um terço dos que compareceram à segunda conferência assistiu a apenas ela e um quarto dos que compareceram à terceira conferência não assistiu nem a primeira nem a segunda. Sabendo ainda que havia um total de 300 pessoas participando do ciclo de conferências, e que cada uma assistiu a pelo menos uma conferência, o número de pessoas em cada conferência foi: Resposta: 156 pessoas.

CAPÍTULO II EQUAÇÃO, O IDIOMA DA ÁLGEBRA.

"*Assim como o Sol empalidece as estrelas com o seu brilho, um homem inteligente eclipsa a glória de outro homem nos concursos populares, resolvendo os problemas que este lhe propõe".*

Este texto da Índia antiga fala de um passa tempo muito popular dos matemáticos hindus da época: a solução de quebra-cabeças em competições públicas, em que um competidor propunha problemas para outro resolver.

François Viète

Era muito difícil a Matemática nesse período. Sem nenhum sinal, sem nenhuma variável, somente alguns poucos sábios eram capazes de resolver os problemas, usando muitos artifícios e trabalhosas construções geométricas.

Hoje, temos a linguagem exata para representar qualquer quebra-cabeça ou problema.

Basta traduzi-los para o idioma da Álgebra: a equação.

Equação é uma maneira de resolver situações nas quais surgem valores desconhecidos quando se tem uma igualdade. A palavra "equação" vem do latim "equatione", equacionar, que quer dizer igualar, pesar, igualar em peso. E a origem primeira da palavra "equação" vem do árabe "adala", que significa "ser igual a", de novo a idéia de igualdade. Por serem desconhecidos, esses valores são representados por letras. Por isso na língua portuguesa existe uma expressão muito usada: "o x da questão". Ela é utilizada quando temos um problema dentro de uma determinada situação. Matematicamente, dizemos que esse x é o valor que não se conhece.

A primeira referencia a equações de que se têm notícias consta do papiro de Rhind, um dos documentos egípcios mais antigos que tratam de matemática, escrito há mais ou menos 4.000 anos.

Como os egípcios não utilizavam a notação algébrica, os métodos de solução de uma equação eram complexos e cansativos.

Os gregos resolviam equações através de Geometria.

Mas foram os árabes que, cultivando a Matemática dos gregos, promoveram um acentuado progresso na resolução de equações. Para representar o valor desconhecido em uma situação matemática, ou seja, em uma equação, os árabes chamavam o valor desconhecido em uma situação matemática de “coisa”. Em árabe, a palavra “coisa” era pronunciada como xay. Daí surge o x como tradução simplificada de palavra “coisa” em árabe.

No trabalho dos árabes, destaca-se o de Al-Khowarizmi (século IX), que resolveu e discutiu equações de vários tipos.

Al-Khowarizmi é considerado o matemático árabe de maior expressão do século IX. Ele escreveu dois livros que desempenharam importante papel na história da Matemática. Num deles, Sobre a arte hindu de calcular, Al-Khowarizmi faz uma exposição completa dos numerais hindus. O outro, considerado o seu livro mais importante, Al-jabr wa’l mugãbalah, contém uma exposição clara e sistemática sobre resolução de equações.

As equações ganharam importância a partir do momento em que passaram a ser escritas com símbolos matemáticos e letras. O primeiro a fazer isso foi o francês François Viète, no final do século XVI. Por esse motivo é chamado “pai da Álgebra”.

Viète também foi o primeiro a estudar as propriedades das equações através de expressões gerais como ax + b = 0. Graças a Viète os objetos de estudo da Matemática deixaram de ser somente problemas numéricos sobre preços das coisas, idade das pessoas ou medidas dos lados das figuras, e passaram a englobar também as próprias expressões algébricas.

A partir desse momento, as equações começaram a ser interpretadas como as entendemos atualmente: equação, o idioma da álgebra.

Atualmente as equações são usadas, entre outras coisas, para determinar o lucro de uma firma, para calcular a taxa de uma aplicação financeira, para fazer a previsão do tempo, etc.

Hoje, chamamos o termo desconhecido de incógnita, que é uma palavra originária do latim “incognitu”, que também quer dizer “coisa desconhecida”.

EQUAÇÕES

O objetivo deste tópico é procurar revisar a resolução de equações de 1º grau na incógnita x, dando subsídios para o capítulo de funções do primeiro grau. A resolução destas equações quando seus coeficientes são numéricos não apresentam grandes problemas.

Equação é toda sentença matemática aberta representada por uma igualdade, em que exista uma ou mais letras que representam números desconhecidos.

Ex: 2x – 5 = 3 » o número desconhecido x recebe o nome de incógnita.

EQUAÇÃO DO 1º GRAU

As equações do primeiro grau são aquelas que podem ser representadas sob a forma a.x + b = 0, em que a e b são constantes reais, com a diferente de 0, e x é a variável.

Na equação 5.x + 20 = 0 temos:

» 5 é o coeficiente

» 20 é o termo independente

» x é a incógnita.

RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU:

Resolver uma equação significa encontrar valores da incógnita que satisfazem a sentença tornando-a verdadeira.

Uma equação do 1º grau pode ser resolvida usando a propriedade:

a.x + b = 0 » a.x = - b » **x =** $-\frac{b}{a}$

Na equação x + 12 = 40, de princípio, sem conhecer o valor da incógnita x, não podemos afirmar se a sentença é verdadeira ou falsa.

Porém podemos verificar facilmente que a equação acima se torna verdadeira para x = 28

x + 12 = 40 » x = 40 - 12 » x = 28

Ao resolvermos uma equação do 1º grau obtemos um resultado (esse resultado é um valor numérico que, substituindo a incógnita por ele, chegamos a uma igualdade numérica), esse pode ser chamado de raiz da equação ou conjunto verdade ou conjunto solução da equação. Logo o conjunto verdade (V), solução (S) ou raiz da equação é 28.

Cada um dos valores que, colocados no lugar da incógnita, transformam a equação em uma sentença verdadeira é chamado de raiz da equação. Para verificarmos se um dado número é ou não raiz de uma equação, basta substituirmos a incógnita por esse número e observarmos se a sentença obtida é ou não verdadeira.

Convém lembrar que na resolução de equações do primeiro grau podemos transformar uma equação em outra equação equivalente mais simples.

Adicionando um mesmo número a ambos os membros de uma equação, ou subtraindo um mesmo número de ambos os membros, a igualdade se mantém.

Seja a equação:

$$x-3=9 \Rightarrow x-3+3=9+3 \Rightarrow x=12$$

Seja a equação:

$$5x=10+4x \Rightarrow 5x-4x=10+4x-4x \Rightarrow x=10$$

Dividindo ou multiplicando ambos os membros de uma equação por um mesmo número não-nulo, a igualdade se mantém.

Seja a equação:

$$3x=15 \Rightarrow \frac{3x}{3}=\frac{15}{3} \Rightarrow x=5$$

Na prática para resolver equações do 1º grau, basta colocar as incógnitas de um lado do sinal de (=) e os "números" do outro.

EXEMPLOS RESOLVIDOS

Ex 4: *Encontre o valor de x na equação*: $2x-8=10$

$$2x-8=10 \Rightarrow 2x=10+8 \Rightarrow 2x=18 \Rightarrow x=\frac{18}{2} \Rightarrow x=9$$

Ex 5: *Encontre o valor de x na equação*: $-6x-28=10+3x$

$$-6x+28=10+3x \Rightarrow -6x-3x=10-28 \Rightarrow -9x=-18 \Rightarrow (-1) \Rightarrow 9x=18 \Rightarrow x=\frac{18}{2} \Rightarrow x=9$$

Ex 6: *Encontre o valor de x na equação abaixo:*

$$\frac{4x+3}{5}+3=\frac{x-9}{2}$$

$$\frac{8x+6+30}{10}=\frac{5x-45}{10} \Rightarrow 8x+6+30=5x-45 \Rightarrow 8x-5x=-45-36 \Rightarrow$$

$$3x=-81 \Rightarrow x=\frac{-81}{3} \Rightarrow x=-27$$

O Método de resolução de equações do 1º grau, no qual colocam-se os valores de um lado do sinal de (=) e as incógnitas do outro lado é apenas um “macete” utilizado para agilizarmos a resolução.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÕES

44. Resolva as seguintes equações:

a) $2x-3=17$

b) $2(2x+7)+3(3x-5)=3(4x+5)-1$

c) $4x+7=x-8$

d) $3-7(1-2x)=5-(x-9)$

e) $\frac{1}{15}x+\frac{1}{5}x-\frac{1}{30}=\frac{1}{3}x-\frac{1}{15}$

f) $6x+8=\frac{2}{3}$

g) $-\frac{1}{6}y+2=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}y$

h) $x-\frac{x-2}{3}=2-\frac{2-x}{4}$

i) $4x-5+3x-2x=9-2x$

j) $6-(3x-3)-[2-(-4x-1)]=-(-3x+2)$

k) $11(2x-3)-4(3x-2)=4(-2x+1)+7$

l) $6-2(3x-3)=2(2x+5)-4(3x-1)$

m) $\frac{x}{4}-\frac{2x-1}{3}=\frac{x+1}{6}$

n) $8x+700=3x-800-\frac{3}{5}$

o) $\frac{3x-9}{2x+7}=\frac{8}{5}$

p) $\frac{2x-3}{6}-\frac{x-1}{8}=\frac{3x-5}{12}$

PROBLEMAS ENVOLVENDO EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU.

Utilizamos equações do 1º grau com uma incógnita na resolução de problemas tal qual o seguinte:

"Se eu tivesse o dobro da quantia que eu possuo, com mais dez reais eu poderia comprar um certo livro que custa cem reais. Quantos reais eu possuo?"

Inicialmente iremos expressar este mesmo problema em linguagem matemática.

Para isto vamos chamar a quantia que eu possuo atualmente de x. Este é valor procurado.

Ao referir-me ao dobro da quantia, matematicamente estou me referindo a 2x, ou seja, ao dobro de x.

O dobro da quantia mais dez reais será expresso matematicamente como 2x + 10.

Finalmente devemos expressar que o dobro da quantia mais dez é igual a cem, logo a expressão inteira será: 2x + 10 = 100.

Basicamente substituímos o texto em português pelos seus respectivos operadores matemáticos.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÕES

45. Uma empresa tem a matriz em São Paulo e filias em todo o Brasil e possui um total de 1.264 funcionários. O número de pessoas que trabalham nas filiais é o triplo do número de pessoas que trabalham na matriz. Quantos funcionários trabalham na matriz dessa empresa? Resposta: 316

46. Distribuir R$ 140,00 entre Paulo, José e Otávio de modo que Paulo receba R$ 15,00 a menos que José, e este receba R$ 25,00 a mais que Otávio. Quanto receberá cada um? Resposta: Otávio R$ 35,00, José R$ 60,00 e Paulo R$ 45,00.

47. Um avô tem 60 anos e seu neto 15. Ao final de quantos anos a idade do avô será o dobro da idade do neto? Resposta: 30.

48. Numa fração o denominador excede o numerador em 5. Se aumentarmos o numerador em 2 unidades, a fração ficará aumentada em $\frac{1}{4}$. Determine esta fração. Resposta: $\frac{3}{8}$.

49. Existem três números inteiros consecutivos com soma igual a 393. Que números são esses? Resposta: 130, 131, 132.

50. Um mágico matemático propôs a seguinte adivinhação: "Vocês estão vendo estas duas caixas. Numa delas têm 95 joaninhas; na outra tem aranhas. Se contarmos as patas de todos os insetos e de todos os aracnídeos que estão nas caixas, chegaremos ao número 1.002. Quantas aranhas tem na caixa". (Lembrete: uma joaninha tem 6 patas, e uma aranha 8 patas). Resposta: 54

51. Uma caixa contém porcas e parafusos. Cada parafuso pesa o dobro de uma porca. O peso da caixa é de 2.400 gramas. Qual a quantidade de parafusos e porcas da caixa, sabendo-se que o total de peças é 100 e que cada porca pesa 20 gramas. Resposta: 20 parafusos e 80 porcas

52. Três filhos recebem mesadas; o mais velho recebe o dobro do que o segundo recebe, e este o dobro do que o mais moço recebe. Sendo o total da mesada de R$ 70,00, quanto recebe cada um? Resposta: R$ 40,00 R$ 20,00 e R$ 10,00

53. Um fazendeiro repartiu 240 bois entre seus três herdeiros da seguinte forma: o primeiro recebeu $\frac{2}{3}$ do segundo e o terceiro tanto quanto o primeiro e o segundo juntos. Quanto recebeu o primeiro herdeiro? Resposta: 48 bois

54. Dois namorados tantos se abraçaram que se parte o colar de pérolas da moça. Um terço das pérolas caiu no chão, um quinto ficou no sofá, um sexto foi achado pela moça e um décimo foi encontrado pelo moço e seis pérolas ficaram no fio. Quantas pérolas tinham o colar? Resposta: 30 pérolas

55. Um pai tem trinta e sete anos e seu filho sete. Daqui a quantos anos, a idade do pai será o triplo da idade do filho? Resposta: 8 anos

56. A idade atual de um pai é de 60 anos. Seus três filhos têm, respectivamente, 7 anos, 11 anos e 16 anos. Daqui a quantos anos a idade do pai será igual à soma das idades dos filhos? Resposta: 13 anos

57. Um feirante distribuiu laranjas entre três clientes, de modo que o primeiro recebe a metade das laranjas, mais meia laranja; o segundo a metade das laranjas restantes, mais meia laranja e o terceiro a metade deste último resto, mais meia laranja. Sabendo-se que não sobrou nem uma laranja, calcule o número total de laranjas e quantas foram dadas a cada cliente. Resposta: 7 laranjas e cada um recebeu 4, 2, e 1 laranja.

58. Uma empresa, em Viçosa, deu férias coletivas aos seus empregados. Sabe-se que 48% dos empregados viajaram para o Rio de Janeiro, 28% viajaram para Belém e os 12 restantes ficaram em Viçosa. Nessas condições, quantos empregados têm essa empresa? Resposta: 50 empregados

59. Um tijolo pesa 1kg mais meio tijolo. Quanto quilograma pesa esse tijolo? Resposta: 2 quilos.

60. Um cavalo e um burro caminhavam juntos, levando sobre os lombos pesadas cargas. Lamentava-se o burro de seu revoltante fardo quando o cavalo lhe disse. “De que ti queixas? Se eu tomasse um saco dos teus, minha carga passaria a ser o dobro da tua. Por outro lado, se eu te desse um de meus sacos, tua carga igualaria a minha”. Quantos sacos levavam cada um dos animais? Resposta: 7 levava o cavalo e 5 levava o burro

SISTEMAS DE EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU

Os sistemas de equações consistem em ferramentas importantes na Matemática, eles são utilizados para determinar os valores de x e y nas equações com duas variáveis. Sua perfeita resolução e de suma importância na Matemática, Física, Química, Engenharia, etc. e principalmente em Administração no cálculo de ponto de equilíbrio ou ponto de nivelamento.

Exemplos de sistemas de equações:

a) $\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+y=6 \\ 2x+3y=2 \end{cases}$

MÉTODOS PARA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU.

A resolução dos sistemas consiste em estabelecer uma relação entre as equações e aplicar técnicas de resolução. Os métodos mais usados na resolução de um sistema são: Método da Substituição, Método da Adição e Método da Igualdade.

Pode-se resolver sistemas de equações pela Regra de Cramer, transformando as equações em matrizes e calculando o determinante, porém esse método é mais utilizado para sistemas que apresentam três equações com três incógnitas.

MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO

O método da substituição consiste em trabalhar qualquer equação do sistema de forma a isolar uma das incógnitas, substituindo o valor isolado na outra equação.

EXEMPLOS RESOLVIDOS

Ex 7: *Observe passo a passo a resolução do sistema:* $\begin{cases} 2x+3y=19 \\ x-y=-3 \end{cases}$

1º Passo: Nesse caso, vamos escolher a 2º equação e isolar a incógnita x.

$$x-y=-3 \Rightarrow x=-3+y$$

2º Passo: Agora, substituímos o valor de x por –3 + y na 1º equação.

$$2x+3y=19 \Rightarrow 2(-3+y)+3y=19 \Rightarrow -6+2y+3y=19 \Rightarrow$$

$$2y+3y=19+6 \Rightarrow 5y\ 25 \Rightarrow y=\frac{25}{5} \Rightarrow y=5$$

3º Passo: Para finalizar, calculamos o valor de x utilizando uma das equações do sistema, de preferência a que aparentemente apresentar ser de mais fácil resolução.

$$x-y=-3 \Rightarrow x-5=-3 \Rightarrow x=-3+5 \Rightarrow x=2$$

Portanto, a solução do sistema é x = 2 e y = 5, isto é, o par ordenado (2, 5)

O Método da Substituição é de difícil execução quando as equações não apresentam coeficientes de valor um, principalmente quando há uma dificuldade em se trabalhar com frações.

Ex 8: Vejamos o exemplo abaixo:

$$\begin{cases} +5x+3y=13 \\ -4x+9y=1 \end{cases}$$

Neste caso, da primeira equação podemos isolar o x e obtemos:

$$5x+3y=13 \Rightarrow 5x=13-3y \Rightarrow x=\frac{13-3y}{5}$$

Substituindo esse valor na segunda equação, obtemos:

$$-4x+9y=1 \Rightarrow -4\left(\frac{13-3y}{5}\right)+9y=1 \Rightarrow \frac{-52+12y}{5}+9y=1$$

$$\frac{-52+12y+45y}{5}=\frac{5}{5} \Rightarrow -52+57y=5 \Rightarrow 57y=5+52 \Rightarrow y=\frac{57}{57} \Rightarrow y=1$$

Na expressão $x=\frac{13-3y}{5}$, substituindo o y por 1, obtemos $x=\frac{13-3.1}{5} \Rightarrow x=\frac{10}{5} \Rightarrow x=2$

A solução do sistema é o par ordenado (2, 1).

Para sistemas que não há coeficientes de valor um, o melhor método para a resolução é o Método da Adição.

MÉTODO DA ADIÇÃO

O método da adição deve ser utilizado nos sistemas em que existe a oportunidade de zerar uma das incógnitas.

Ex 9: Observe a resolução do sistema a seguir: $\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=12 \end{cases}$

1º passo: Somamos as equações, eliminando uma das incógnitas e determinando o valor da outra incógnita.

$$+\begin{cases} x+y=10 \\ x-y=12 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 2x=22 \\ x=\frac{22}{2} \\ x=11 \end{array}$$
$$2x+0y=22$$

2º Passo: Calculado o valor de x, basta escolher uma das equações e substituir o valor de x por 11.

$$x+y=10 \Rightarrow 11+y=10 \Rightarrow y=10-11 \Rightarrow y=-1$$

A solução do sistema é o par ordenado (11, –1).

Para casos que não é possível zerar uma das incógnitas na primeira soma, devemos utilizar um artifício usado na resolução de sistemas lineares que consiste em multiplicar os dois membros de uma ou das duas equações por um número real e somarmos os membros correspondentes das equações.

EXEMPLOS RESOLVIDOS.

Ex 10: *Encontre o valor de x e y no sistema.* $\begin{cases} 3x - y = 10 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases}$

Para eliminarmos a incógnita x devemos multiplicar a primeira equação por -2 e a segunda por 3, em seguida somar membro a membro as duas equações.

$$\begin{cases} 3x - y = 10 \ \ (-2) \\ 2x + 5y = 1 \ \ (3) \end{cases} \qquad + \begin{cases} -6x + 2y = -20 \\ \underline{+6x + 15y = 3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 17y = -17 \Rightarrow y = \frac{-17}{17} \Rightarrow y = -1$$

Calculado o valor de y, basta escolher uma das equações e substituir o valor de y por – 1.

$$3x - y = 10 \Rightarrow 3x - (-1) = 10 \Rightarrow 3x + 1 = 10 \Rightarrow 3x = 10 - 1 \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = \frac{9}{3} \Rightarrow x = 2$$

A solução do sistema é o par ordenado (2, - 1)

MÉTODO DA IGUALDADE OU COMPARAÇÃO

Este método consiste em isolar uma incógnita numa equação e a mesma incógnita na outra, depois basta igualar as duas, recaindo-se numa equação do 1º grau com uma única incógnita.

Ex 11: Observe a resolução do sistema a seguir: $\begin{cases} 2p - 3q = 1 \\ 3p + 2q = 34 \end{cases}$

*1º passo***:** Vamos isolar o p na primeira e na segunda equação para podermos igualar as equações.

$$\begin{array}{ll} 2p - 3q = 1 & 3p + 2q = 34 \\ 2p = 1 + 3q & 3p = 34 - 2q \\ p = \dfrac{1+3q}{2} & p = \dfrac{34-2q}{3} \end{array}$$

2º passo: Igualar as duas equações para encontrar o valor de q.

$$\frac{1+3q}{2} = \frac{34-2q}{3} \Rightarrow 3 + 9q = 68 - 4q \Rightarrow 9q + 4q = 68 - 3 \Rightarrow 13q = 65 \Rightarrow q = \frac{65}{13} \Rightarrow q = 5$$

3º passo: Substituir q = 5 em $p = \frac{1+3q}{2}$, para encontrar o valor de p.

$$p = \frac{1+3q}{2} \Rightarrow p = \frac{1+3.5}{2} \Rightarrow p = \frac{16}{2} \Rightarrow p = 8$$

A solução do sistema é o par ordenado (8, 5)

Todos os métodos são importantes e cada um apresenta uma vantagem, o importante é saber armar o sistema e optar pelo método mais rápido de resolução.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÕES

61. Resolva as seguintes equações:

a) $\begin{cases} 2x+y=10 \\ 3x-2y=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2m+3n=10 \\ 4m-n=-1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y=7 \\ \dfrac{2x}{5}=\dfrac{3y}{7} \end{cases}$

d) $\begin{cases} 5(a+1)+3(b-2)=4 \\ 8(a+1)+5(b-2)=9 \end{cases}$

e) $\begin{cases} -0{,}4p-q=5{,}8 \\ p+0{,}3q=-3{,}5 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2r+s=6 \\ 2r+3s=2 \end{cases}$

62. Num depósito existem 24 extintores de incêndio, sendo de espuma química e dióxido de carbono. Sabendo-se que o de dióxido de carbono é o triplo do de espuma química, conclui-se que o número de extintores de espuma química existentes nesse depósito é: Resposta: 6 extintores

63. A soma da minha idade com a da minha filha é 72. Daqui a 3 anos a minha idade será o dobro da idade da minha filha. A minha idade atual, em anos é: Resposta: 47 anos

64. Eu tenho o dobro da idade da minha filha. Se a diferença de nossas idades é 23 anos, minha idade é: Resposta: 46 anos

65. Um copo cheio tem massa de 385g; com $\frac{2}{3}$ de água tem massa de 310 g. A massa do copo com $\frac{3}{5}$ da água é: Resposta: 295 gramas

66. Uma pessoa retira R$ 70,00 de um banco, recebendo 10 notas, algumas de R$ 10,00 e outras de R$ 5,00. Calcule quantas notas de R$ 5,00 a pessoa recebeu. Resposta: Recebeu 6 notas de cinco reais

67. Em um restaurante há 12 mesas, todas ocupadas. Algumas por 4 pessoas, outras por apenas 2 pessoas num total de 38 fregueses. O número de mesas ocupadas por apenas duas pessoas é? Resposta: 5 mesas

68. Um aluno ganha 5 pontos por exercícios que acerta e perde 3 por exercício que erra. Ao fim de 50 exercícios, tinha 130 pontos. Quantos exercícios acertou? Resposta: 35 exercícios

69. Luís e Maria resolveram comparar suas coleções de CDs. Descobriram que têm ao todo 104 CDs e que se Maria tivesse 12 CDs a menos teria o triplo do número de CDs do Luís. É possível afirmar que a quantidade de CDs que Luís possui é: Resposta: 23 cds

70. Em um restaurante existem mesas de 3, 4 e 6 cadeiras num total de 16 mesas. Ocupando todos os lugares nas mesas de 3 e 4 cadeiras, 36 pessoas ficam perfeitamente acomodadas. Sabendo-se que o restaurante acomoda no máximo 72 pessoas, quantas mesas de 3, 4 e 6 cadeiras, respectivamente, existem? Resposta: 4 mesas com três lugares, 6 mesas com quatro lugares e 6 mesas com seis lugares.

71. Um jogador de basquete fez o seguinte acordo com seu clube: cada vez que ele convertesse um arremesso, receberia R$ 10,00 do clube e cada vez que ele errasse pagaria R$ 5,00 ao clube. Ao final de uma partida em que arremessou 20 vezes, ele recebeu R$ 50,00. Pode-se afirmar que o número de arremessos convertidos pelo jogador foi: Resposta: 10 arremessos

72. Um estacionamento cobra R$ 2,00 por moto e R$ 3,00 por carro estacionado. Ao final de um dia, o caixa registrou R$ 277,00 para um total de 100 veículos. Quantas motos e carros usaram o estacionamento nesse dia? Resposta: 23 motos e 77 carros.

73. Numa lanchonete, 2 copos de refrigerantes e 3 coxinhas custam R$ 5,70. O preço de 3 copos de refrigerantes e 5 coxinhas é R$ 9,30. Nessas condições, é verdade que cada copo de refrigerante custa Resposta: R$ 0,90 as menos que cada coxinha

74. Em um terreiro há galinhas e coelhos, num total de 23 animais e 82 pés. Quantas são as galinhas e os coelhos? Resposta: São 5 galinhas e 18 coelhos

75. Num escritório de advocacia trabalhavam apenas dois advogados e uma secretária. Como Dr. André e Dr. Carlos sempre advogam em causas diferentes, a secretária, Cláudia, coloca um grampo em cada processo do Dr. André e dois grampos em cada processo do Dr. Carlos, para diferenciá-los facilmente no arquivo. Sabendo-se que ao todo são 78 processos, nos quais foram usados 110 grampos, podemos concluir que o número de processos do Dr. Carlos é igual a: Resposta: 40 processos.

76. Considere uma árvore com g galhos e um bando de p pássaros. Caso pousem 2 pássaros em cada galho, sobrará um galho vazio; caso pouse apenas um pássaro em cada galho, sobrará um pássaro sem ter galho para pousar. Quantos são os galhos (g) e pássaros (p)? Resposta: 3 galhos e 4 pássaros

77. Uma fábrica de refrigerantes produz refrescos de guaraná nas versões tradicional e diet. Os bares vendem os tradicionais por R$ 1,00 e os diet por R$ 1,25. Ao final do dia haviam sido vendidos 2.000 refrigerantes, com um faturamento de R$ 2.100,00. Descubra quantas garrafas de cada tipo de refrigerante foram vendidas. Resposta: Foram 1.600 tradicionais e 400 diet.

78. A Transportadora Ruas precisa mover 140 toneladas de mercadorias. Fazem parte de seu quadro de funcionários 10 motoristas qualificados e dois tipos de caminhões. Um tipo pode transportar 25 toneladas e o outro tipo pode transportar somente 15 toneladas. Devido a uma exigência do seguro caminhões de 25 toneladas de capacidade devem ter dois motoristas na cabine durante o transporte. Caminhões com capacidade de 15 toneladas precisam de apenas um motorista na cabine. Determine quanto caminhão de cada tipo devem ser usados para mover a terra em uma viagem utilizando todos os motoristas disponíveis. Resposta: dois caminhões de 25 toneladas e seis caminhões de 15 toneladas.

INEQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU

Em sua definição mais simples e compreensível, pode ser definida como toda e qualquer sentença da matemática que é aberta por um sinal de desigualdade. As inequações do primeiro grau apresentam as seguintes formas:

$$a.x+b>0 \qquad a.x+b<0 \qquad a.x+b\geq 0 \qquad a.x+b\leq 0 \qquad a.x+b\neq 0$$

Sendo que: a e b, são números reais e diferentes de zero (a e b ≠ 0), respectivamente.

Exemplos:

$$4.x+3>0 \qquad -x-10<0 \qquad 3x+12\geq 0 \qquad 6x+8\leq 0 \qquad 5x+25\neq 0$$

SOLUÇÃO DE INEQUAÇÕES DO 1º GRAU

Nas inequações do primeiro grau que estejam na forma a.x + b > 0, tem-se o objetivo de se apurar um conjunto de todos e quaisquer possíveis valores que possam assumir uma ou mais variável que estejam envolvidas nas equações proposta no problema.

Uma maneira simples de resolver uma inequação do 1° gr au é isolarmos a incógnita em um dos membros da desigualdade e realizarmos as operações que aparecerem.

EXEMPLOS RESOLVIDOS.

Ex 12: *Determine todos os possíveis números inteiros para os quais satisfaça a inequação:*

$$4.x+8>0 \Rightarrow 4x>0-8 \Rightarrow x>\frac{-8}{4} \Rightarrow x>-2$$

Após fazer os devidos cálculos da inequação acima, pode-se concluir que a solução apresentada é formada por todos os números inteiros maiores que - 2.

Ex 13: *Encontre os valores de x que satisfazem a inequação* $8+3x<x-20$

$$8+3x<x-20 \Rightarrow 3x-x<-20+8 \Rightarrow 2x<-12 \Rightarrow x<\frac{-12}{2} \Rightarrow x<-6$$

Ex 14: *Vamos resolver a inequação* $3x \geq 6(x+5)-45$

$$+3x \geq 6(x+5)-45 \Rightarrow +3x \geq 6x+30-45 \Rightarrow +3x-6x \geq 15 \Rightarrow -3x \geq -15\ (-1) \Rightarrow$$

$$+3x \leq 15 \Rightarrow x \leq \frac{15}{3} \Rightarrow x \leq 5$$

☞ Em inequações, quando multiplicamos por -1, devemos inverter o sinal da desigualdade.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÕES

79. Resolva as seguintes inequações:

a) $2x-3 \geq 17$

b) $3(2x+7)+4(3x-5) \neq 2(4x+5)+1$

c) $-9-7(1-2x)<5-(x-9)$

d) $\frac{x}{15}+\frac{x}{5}-\frac{1}{30} \leq \frac{x}{3}-\frac{1}{15}$

e) $4x+7>x-8$

f) $8x+700<3x-800$

g) $-6x+8>5x$

h) $\frac{3x+9}{2x+7} \leq \frac{8}{5}$

80. Duas pequenas fábricas de calçados, A e B, têm fabricado, respectivamente, 3.000 e 1.100 pares de sapatos por mês. Se, a partir de janeiro, a fábrica A aumentar sucessivamente a produção em 70 pares por mês e a fábrica B aumentar sucessivamente a produção em 290 pares por mês, a produção da fábrica B superará a produção de A a partir de: Resposta: Setembro

81. Quantos números inteiros e positivos satisfazem a inequação $\frac{x}{2}+\frac{2x-7}{3} \leq 0$? Resposta: 2

82. Por uma mensagem dos Estados Unidos para o Brasil, via fax, a Empresa de Correios e Telégrafos (ECT) cobra R$ 1,37 pela primeira página e R$ 0,67 por página que se segue, completa ou não. Qual o número mínimo de páginas de uma dessas mensagens para que seu preço ultrapasse o valor de R$ 10,00? Resposta: 14

83. Um hotel tem acomodações para 50 hóspedes. Cada hóspede gasta R$ 40,00 em acomodações por dia. Sabe-se que 40% dos hóspedes utilizam o restaurante do hotel e gastam em média R$ 10,00 por pessoa.

a) Quantos hóspedes o hotel deverá abrigar para ter receita diária de no mínimo R$ 1.000,00. Resposta: no mínimo 23 hóspedes.

b) Quantos hóspedes o hotel deverá abrigar para que a receita diária esteja entre R$ 1.500,00 e R$ 2.000,00? Resposta: $35 < x < 45$

84. Três números são inteiros tais que o primeiro é o dobro do segundo e o terceiro é dez a mais que o segundo. Sabe-se que a soma dos dois primeiros é maior que o terceiro. Se o segundo número é menor que sete, então a soma dos três números é: Resposta: 34

85. Considere o problema: “Em um cofre existem apenas moedas de 50 centavos e de 10 centavos, num total de 60 unidades. Se a quantia Q (em reais) existente no cofre é tal que R$ 24,00 < Q < R$ 26,00, quantas são as moedas de cinqüenta centavos? “ Resposta: A quantia de moeda está entre 45 e 50 moedas.

86. Fábio quer arrumar um emprego de modo que, do total do salário que receber, possa gastar $\frac{1}{4}$ com alimentação, $\frac{2}{5}$ com aluguel e R$ 300,00 em roupas e lazer. Se, descontadas todas essas despesas, ele ainda pretende que lhe sobrem no mínimo R$ 85,00, então, para que suas pretensões sejam atendidas, seu salário deve ser no mínimo. Resposta: R$ 1.100,00

87. Carlos trabalha como disc-jóquei (dj) e cobra uma taxa fixa de R$ 100,00, mais R$ 20,00 por hora, para animar uma festa. Daniel, na mesma função, cobra uma taxa fixa de R$ 55,00, mais R$ 35,00 por hora. O tempo máximo de duração de uma festa, para que a contratação de Daniel não fique mais cara que a de Carlos, é: Resposta: 3 horas

88. Um estacionamento cobra R$ 6,00 pela primeira hora de uso, R$ 3,00 por hora adicional e tem uma despesa diária de R$ 320,00. Considere-se um dia em que sejam cobradas, no total, 80 horas de estacionamento. O número mínimo de usuários necessário para que o estacionamento obtenha lucro nesse dia é: Resposta: 27

89. Quantos litros de gasolina, no mínimo, preciso ter no tanque de meu carro para percorrer mais de 700 quilômetros sem abastecer, sabendo que meu carro percorre 12 quilômetros com um litro de gasolina? Resposta: 58,3 litros

90. A solução da inequação $\frac{x}{-2} \leq \frac{x-1}{-3}$ é tal que : Resposta: $x \geq -2$

91. Sabendo que o lucro mensal da empresa Belas Artes pode ser representado pela função f(x) = 300x – 2.500, onde x representa a quantidade vendida. Determine a quantidade que a empresa terá que vender para ter um lucro entre R$ 10.500,00 e R$ 20.000,00? Resposta: Entre 27 e 58 unidades.

92. Três planos de telefonia celular são apresentados na tabela abaixo:

Plano	*Custo Fixo Mensal*	*Custo Adicional por Minuto*
A	R$ 35,00	R$ 0,50
B	R$ 20,00	R$ 0,80
C	0	R$ 1,20

a) Qual é o plano mais vantajoso para alguém que utilize 25 minutos por mês? Resposta: Plano C

b) A partir de quantos minutos de uso mensal o plano A é mais vantajoso que os outros dois? Resposta: A partir de 50 minutos

93. Um macaco caiu num buraco de 20 metros de profundidade, às duas horas de uma fatídica madrugada. Depois de passar uma hora refazendo-se do susto, começou a subir para sair do maldito buraco. Acontece que, devido a sua massa e as paredes escorregadias, ele conseguia em uma hora subir continuamente 5 metros, dava uma pequena parada e escorregava três metros, retomando imediatamente a subida. Qual o número mínimo de horas para o macaco conseguiu sair do buraco? Resposta: 9 horas

94. Para se tornar rentável, uma granja deve enviar para o abate x frangos por dia, de modo que seja satisfeita a desigualdade $1{,}5x + 80 \leq 2{,}5x - 20$. Nessas condições, pode-se afirmar que o menor valor de x é: Resposta: 100 frangos.

95. Quando contratou uma funcionária, um estabelecimento hoteleiro deu-lhe duas opções de remuneração: R$ 608,00 mensais ou R$ 4,00 por cada hora de trabalho.Se, nos dois casos, a funcionária exercer a profissão trabalhando o mesmo número de horas, quantas horas tem de trabalhar para lhe ser mais vantajoso receber por hora? Resposta: Mais que 152 horas.

CAPÍTULO III A FUNÇÃO DAS FUNÇÕES

"*A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como, também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens*". (Descartes)

No início do século XVII, quando o estudo da natureza começou a basear-se na observação dos fenômenos e nas leis pré procuravam explicá-los, surgiram as primeiras idéias sobre o conceito de função.

Leonhard Euler

Gallileu Galilei (1.564 – 1.642) e Isaac Newton (1.642 – 1.727) utilizaram em seus trabalhos as noções de lei e dependências entre os fenômenos, que estão diretamente ligadas ao conceito de funções.

No século XVIII, o matemático suíço Jean Bernuilli (1.667 – 1.748) começou a utilizar o termo função para designar valores obtidos de operações entre variáveis e constantes. Nesse mesmo século, o matemático Leonhard Euler também fez uso do conceito de função.

Apesar desse conceito ter sido amplamente utilizado durante o século XVIII, a definição que mais se aproximou da atualmente aceita foi apresentada apenas na primeira metade do século XIX, pelo matemático alemão Peter G. L Dirichlet (1805 – 1859). Essa definição apenas se diferencia da atual pelo fato de, na época, ainda não ter sido desenvolvida a teoria dos conjuntos.

Modernamente, o conceito de função baseia-se na idéia elementar de par ordenado e no estabelecimento de relações entre conjuntos.

UMA IDÉIA DE FUNÇÃO

A idéia de função surgiu de observações de fatos que ocorrem na natureza. A partir dessas observações é que surgiram os enunciados de leis que estabeleceram relações entre causas e efeitos.

Em muitas situações práticas, o valor de uma grandeza depende do valor de uma outra grandeza. Existe, portanto, uma relação entre essas grandezas. Essas relações são expressas por fórmulas que no meio matemático recebem o nome de funções.

A palavra função evoca a idéia de dependência. Exemplos:

- O espaço de frenagem de um veículo é a distancia necessária para que ele pare definitivamente.
- O preço da gasolina e o preço do barril de petróleo
- O preço de um artigo e os fatores envolvidos na sua fabricação.

Além desse exemplo, podemos exemplificar através de outros, como:

- O valor da renda arrecada em um estádio de futebol depende da quantidade de torcedores que irão assistir ao jogo, logo, o valor arrecadado é em função do número de torcedores;
- A altura de uma planta depende do tempo de vida dessa planta, logo, a altura é em função do tempo de vida da planta;
- O lucro mensal de uma empresa depende da quantidade vendida durante o mês, logo, o lucro é em função da quantidade vendida.

Os fenômenos biológicos, sociológicos, estatísticos ou econômicos na maioria das vezes podem maioria das funções pode ser expressas em uma tabela ou gráficos e na observação das tabelas e gráficos surgem às sentenças matemáticas que tentam reproduzir o mais próximo possível à relação entre as grandezas, mesmo que essas sentenças representem apenas um pequeno intervalo de valores.

Praticamente em tudo que vemos e fazemos existe uma relação de dependência entre duas ou mais grandeza, portanto tudo é função, tornando esse conteúdo um dos mais importantes da Matemática.

Chamamos de relações às associações entre elementos de dois conjuntos. As relações servem para descrever situações que ocorrem no nosso dia-a-dia.

Uma relação entre dois conjuntos A e B é uma associação de elementos de A com elementos de B.

Para entender melhor vamos resolver algumas situações que envolvem a relação entre as grandezas, suas causas e efeitos.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÕES

96. Certa máquina foi comprada pelo preço de R$ 54.000,00 e vendida depois de 12 anos por R$ 30.000,00. Determine:

a) Qual foi sua depreciação total? Resposta: R$ 24.000,00

b) Qual foi sua depreciação anual? Resposta: R$ 2.000,00

c) Qual o valor da máquina após 2, 3, 5, e 7 anos? Resposta: R$ 50.000,00; R$ 48.000,00; R$ 44.000,00; R$ 40.000,00

d) Escreva uma fórmula matemática que dá o valor depreciado anualmente em função dos anos. Resposta: V = 54.000 - 2.000n

97. Um vendedor ambulante, que só vende um tipo de artigo, compra seus produtos ao preço unitário de R$ 35,00 e os vende cada unidade por R$ 42,00. Complete a tabela abaixo e responda.

Quantidade vendida	1	3	4	8	10	20
Valor arrecadado						

a) Qual o valor arrecadado quando forem vendidos 45, 50 e 106 unidades do produto? Resposta: R$ 1.890,00; R$ 2.100,00; R$ 4.452,00

b) Quantas unidades do produto foram vendidas se o valor arrecadado foi de R$ 14.406,00? Resposta: 343

c) Escreva uma fórmula matemática que expresse o valor arrecadado V em função da quantidade vendida q. Resposta: V = 42.q

d) Qual o valor gasto pelo vendedor ambulante quando adquirir 20, 30, 50 e 60 produtos do seu fornecedor? Resposta: R$ 700,00; R$ 1.050,00; R$ 1.750,00; R$ 2.100,00

e) Escreva uma fórmula matemática que expresse o valor gasto G em função da quantidade q de unidades compradas. Resposta: G = 35.q

98. Um encanador A cobra por serviço feito um valor fixo de R$ 100,00 mais R$ 50,00 por hora de trabalho. Um outro encanador B cobra um valor fixo de R$ 80,00 mais R$ 60,00 por hora de trabalho. Expresse a fórmula matemática que dá o valor total cobrado pelo encanador A e pelo encanador B em função do número de horas trabalhadas? Resposta: A = 100+ 50.h e B = 80 + 60.h

99. Uma pessoa, pesando 156 kg, recolhe-se a um SPA onde se anunciam perdas de peso de até 2,5kg por semana. Suponhamos que isso realmente ocorra. Nessas condições determine quantas semanas completas que a pessoa deverá permanecer no SPA para sair de lá com de 121 kg de peso. Resposta: 14 semanas

100. Em uma determinada loja, o salário mensal fixo de um vendedor é de R$ 240,00. Além disso, ele recebe R$ 12,00 por unidade vendida. Expresse o ganho mensal (S) em função do número (u) de unidades vendidas e calcule: Resposta: S = 240 + 12.u

a) Quantas unidades ele deve vender para receber um salário de R$ 720,00? Resposta: 40

b) Qual o salário recebido no final do mês se foram vendidas 1.300 unidades do produto? Resposta: 15.840,00

101. O preço de uma corrida de táxi depende da distância percorrida. A tarifa y é composta de duas partes; uma parte fixa denominada bandeirada e uma parte variável que depende do número de quilômetros rodados. Supondo que a bandeirada esteja custando R$ 2,00 e o quilometro rodado, R$ 1,50. Complete a tabela abaixo com os valores que faltam e responda.

Km Rodado	100	200		300	453		K
Valor Pago			377,00			902,00	

a) Qual o preço de uma corrida se o táxi rodou 260 quilômetros? Resposta: R$ 392,00

b) Se o valor pago foi de R$ 62,00 quantos quilômetros foi percorrido? Resposta: 40 km

102. No, Paçoca Mágic Park, para entrar no parque você paga um valor de R$ 77,00, uma taxa adicional de R$ 3,00 para cada brinquedo que utilizar e R$ 5,00 para cada show que assistir. Determine:

a) Qual o valor total pago por uma pessoa que utilizou dez brinquedos somente? Resposta: R$ 107,00

b) Qual o valor pago para uma pessoa que somente assistiu cinco shows? Resposta: R$ 102,00

c) Qual a fórmula matemática que dá o valor total pago em função do número de brinquedos utilizados? Resposta: V = 3.x + 77

d) Qual a fórmula matemática que dá o valor total pago em função do número de shows assistidos? Resposta: V = 5.y + 77

e) Qual o valor pago por uma pessoa que assistiu três shows e utilizou oito brinquedos? Resposta: R$ 116,00

f) Expresse o valor total pago em função dos números de brinquedos utilizados e shows assistidos. Resposta: V = 3x + 5y + 77

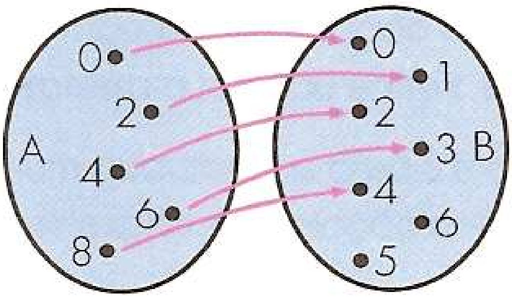
103. Um produtor de leite diz que uma vaca leiteira produz 4.500 litros de leite por ano, em média, que é vendido por R$ 0,20 o litro. Este produtor tem um gasto fixo anual de R$ 20.000 para a manutenção das instalações. Expresse o ganho anual do produtor de leite em função do número de vacas que ele cria. Resposta: $y = 900x - 20.000$

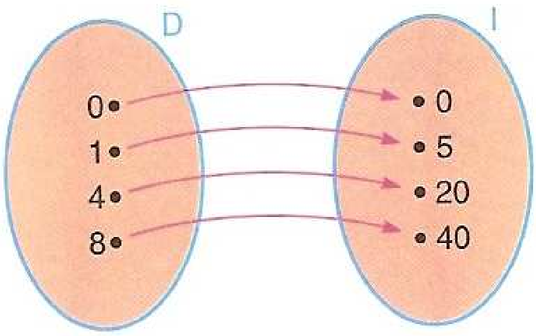
FUNÇÃO E CONJUNTOS

Vimos que quando existe uma relação entre duas grandezas, isso pode ser definido como função. Na verdade, função pode ser definida como um tipo especial de relação entre grandezas.

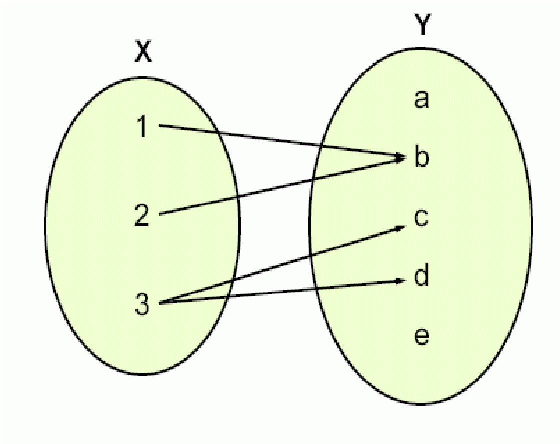
Definição: Sejam dois conjuntos A e B não vazios, dizemos que B está em função de A quando todo elemento do conjunto A está associado a um e apenas um elemento em B.

Observe os Diagramas.

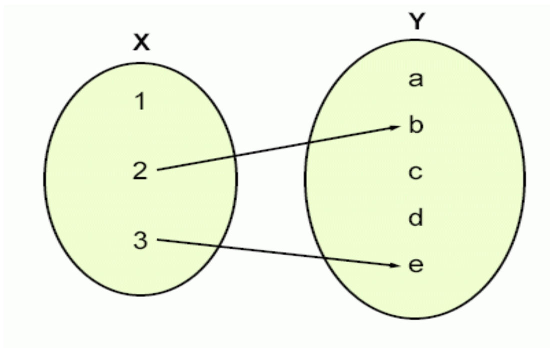




- Cada elemento do conjunto A está associado a um único elemento do conjunto B. Logo é uma função de A em B.

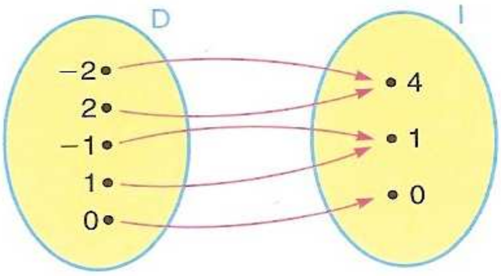


- O elemento 3 do conjunto X está associado a dois elementos (c, d) em Y, logo não é função.



- O elemento 1 do conjunto X não está associado a nenhum elemento do conjunto Y, logo não é função.

Quando um elemento do conjunto A se associa a algum elemento do conjunto B, eles formam o par ordenado (x; y).



No diagrama ao lodo temos os seguintes pares ordenados: (-2; 4), (2; 4), (-1; 1), (1; 1), (0; 0).

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÕES

104. O recipiente ao lado está completamente cheio com 20 litros de água. Abre-se uma torneira que o esvazia a razão de 2 litros por minuto. Determine:

a) Em quanto tempo o tanque ficará vazio?

b) Escreva todos os pares ordenados possíveis

c) Escreva a função que representa o volume V de água que resta no tanque em relação ao tempo t em minutos.

105. Conforme tabela abaixo, escreva os pares ordenados, faça um diagrama e verifique se é uma função. Em caso afirmativo, escreva uma fórmula matemática para expressar essa função.

Meses de Aula	1	2	3	5	8	9
Valor Pago	125,00	170,00	215,00	305,00	440,00	485,00

106. Um representante comercial recebe, mensalmente, um salário composto de duas partes: uma fixa, no valor de R$ 2.000,00, e uma parte variável, que corresponde a uma comissão de 8% do total das vendas que ele faz durante o mês. Com estas informações escreva a lei que representa o seu salário S(q) em função da quantidade vendida q

107. A temperatura de certo forno industrial depende do tempo ligado, e ela vale $T(t) = 30 + \sqrt{t}$. Nessa função T é a temperatura e t é o tempo (em minutos) do forno ligado. Responda:

a) Qual é a temperatura do forno 4 e 25 minutos depois de ligado? Resposta: 32º e 35º

b) Em que instante t o forno alcançará a temperatura final de 38 ℃? Resposta: 64 minutos

c) Qual é a temperatura inicial (ao ligar o forno)? Resposta: 30º

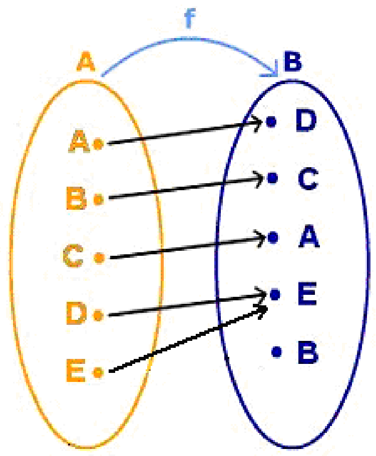
108. Abece é vendedor em uma distribuidora de bebidas. Seu salário mensal (y) é composto por 2% do total (x) de suas vendas, adicionado a uma ajuda de custo no valor de R$ 750,00. Qual a lei de formação da função que expressa o valor salarial recebido: Resposta: S = 0,02x + 750

DOMÍNIO E IMAGEM DA FUNÇÃO

Numa função, o domínio é constituído por todos os valores que podem ser atribuídos a variável independente x.

Já a imagem y da função é formada pelos resultados quando substituímos os valores do domínio na variável independente.

Chamamos de domínio de *R* o conjunto de todos elementos de *A* que estão associados a pelo menos um elemento de *B*, e de imagem de *R* o conjunto de todos os elementos de *B* que são imagens de pelo menos um elemento de *A*. Vejamos este caso:



O conjunto **A** é chamado de **domínio da função - D(f),** onde os elementos de A tem imagem em B.

D = {a, b, c, d, e}

O conjunto **B** é chamado de **contradomínio da função - CD(f)**.

CD = {a, b, c, d, e,}

Os elementos de B que são associados a algum elemento de A formam o **conjunto imagem de f - Im(f)** ou simplesmente a imagem de f.

Im = {a, b, c, d}

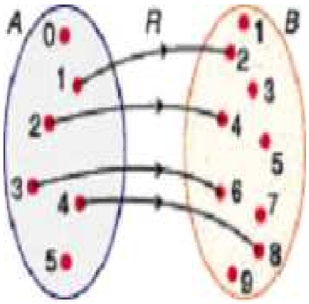
Tome Nota:

- A dupla formada pelo domínio e a imagem e denominada de par ordenado (x, y).
- No exemplo acima temos os seguintes pares ordenados. (a, d), (b, c), (c, a), (d, e), (e, e),
- São os pares ordenados (x, y) que irão formar o ponto no gráfico da função.

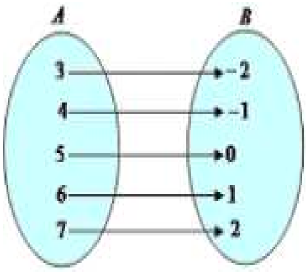
EXERCÍCIOS DE APLICAÇÕES

109. Observe os diagramas abaixo e assinale com x aquelas que são funções:

a)

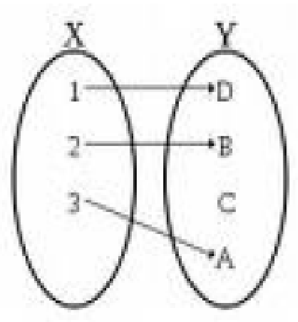


b)

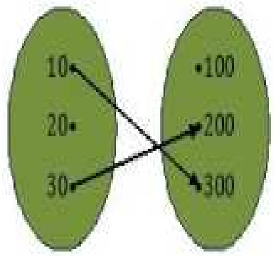


c)

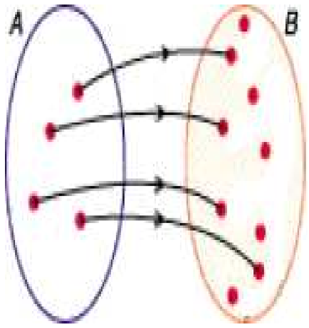
d)



e)

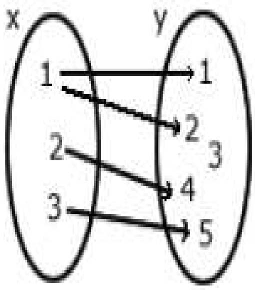


f)

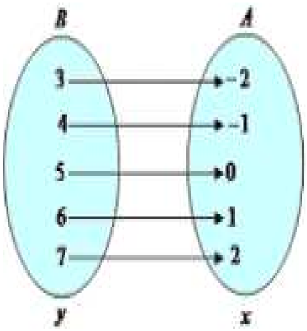


110. Estabelecer o domínio, a imagem e o contradomínio das funções abaixo:

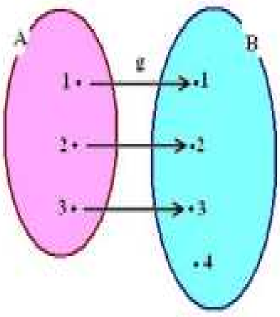
a)



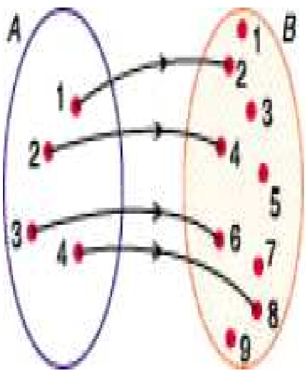
b)



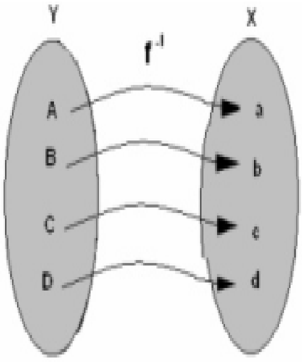
c)



d)



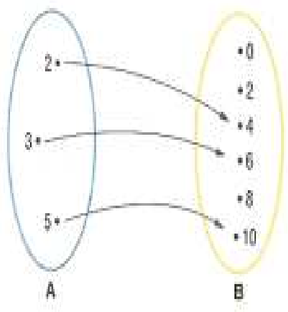
e)



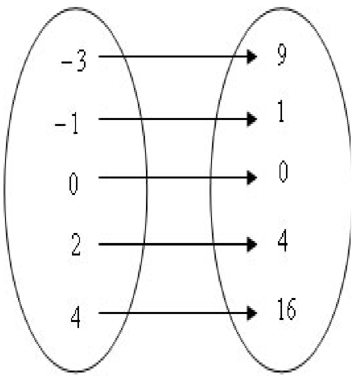
f)

111. O diagrama de flechas ao lado representa uma função f de A em B. Determinar:

a) D (f)
b) CD (f)
c) Imf (f)
d) O valor do domínio quando a imagem for 6.
e) O valor da imagem quando ao domínio for 5.



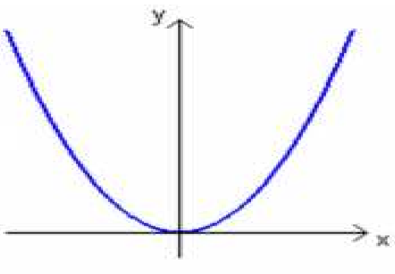
112. Com base no diagrama abaixo faça o que se pede:



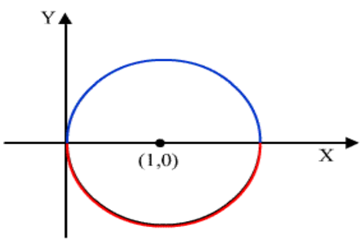
a) Qual o domínio dessa função:
....
....
b) Qual é a imagem dessa função:
....
....
c) Qual o Contradomínio dessa função:
....
....
d) Se x = 2 qual o valor de y?
....
....
e) Se y = 9 qual o valor de x?
....
.....

113. Quais dos gráficos abaixo representam funções:

a)

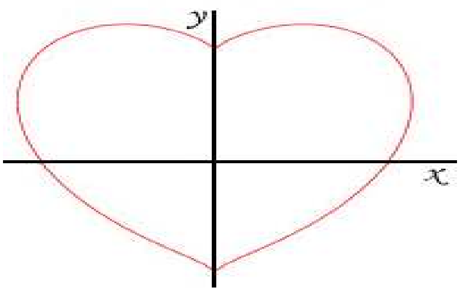


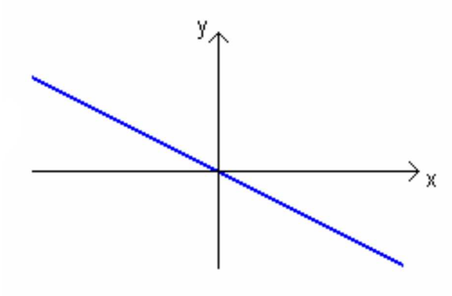
b)



c)

d)





FUNÇÃO DO PRIMEIRO GRAU

DEFINIÇÃO: Uma função é chamada de função do 1º grau se sua sentença for dada por **f(x) = ax + b**, sendo **a** e **b** constantes reais com **a ≠ 0** sendo:

- **x** → a variável independente.
- **y** → f(x) é a variável que dependente de **x**.
- A constante **a** é chamada de coeficiente angular e representa a variação de **y** correspondente a um aumento do valor de **x**;
- A constante **b** é chamada de coeficiente linear e representa, no gráfico, o ponto de intersecção da reta com o eixo **y**;
- Raiz da função é o valor de x para qual a função se anula. f(x) = 0 → x = $-\frac{b}{a}$; no gráfico, representa o ponto de intersecção da reta com o eixo x.

Exemplos de Função do Primeiro Grau.

- f(x) = 5x + 2
- f(x) = - x
- f(x) = -x + 3
- f(x) = 3x
- f(x) = $\frac{x}{2}+\frac{1}{3}$
- f(x) = $\frac{1}{7}x$
- f(x) = 7
- f(x) = 2 – 4

Valor Numérico de uma Função do Primeiro Grau

Para se calcular o valor numérico de uma função **f(x) = a.x + b** para x_n é dado por **$f(x_n) = a.x_n + b$.**

EXEMPLOS RESOLVIDOS

Ex 15: *Dada a função f(x) = -2x + 3, determine f(1).*

$$f(x) = -2x + 3 \Rightarrow f(1) = -2.1 + 3 \Rightarrow f(1) = -2 + 3 \Rightarrow f(1) = 1$$

Ex 16: *O lucro de uma indústria que vende um único produto é dado pela fórmula matemática L (x) = 4x – 1000, onde L representa o lucro e x representa a* *quantidade de produto vendido. Determine o valor do lucro quando foram vendidas 1.000 unidades.*

$$l(x)=4x-1.000 \Rightarrow l(1.000)=4.1.000-1.000 \Rightarrow l(x)=4.000-1.000 \Rightarrow l(x)=3.000$$

Ex 17: *Dada a função f(x) = 4x + 5, determine f(x) = 7.*

$$f(x)=4x-5 \Rightarrow 7=4x-5 \Rightarrow 7+5=4x \Rightarrow 12=4x \Rightarrow \frac{12}{4}=x \Rightarrow x=3$$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÕES

114. Dada a função afim f(x) = 2x + 15, determine:

a) f(1) =

b) f(0) =

c) f(8) =

115. Considere a função f(x) = 2x - 6, determine f(9). Resposta: 12

116. Dada a função afim f(x) = 2x + 3, determine os valores de x para que:

a) f(x) = 1

b) f(x) = 0

c) f(x) = $\frac{1}{3}$

117. Dada a função y = 3x + 40 determine:

a) valor de y quando x = 10

b) O valor de x quando y = 190

118. Seja a função f(x) = x + 5, determine f(x) = 24 Resposta: 21

119. Considerando a função f (x) = 3x - 6 Determine

a) f (6)

b) f (-3)

c) f $\left(\frac{1}{2}\right)$

120. Considerando a função f (x) = 5x + 6 Determine

a) f (x) = -14

b) f (x) = 21

c) f (x) = 9

121. Dada a função y = 0,5x + 80 determine:

a) valor de y quando x = 100

b) O valor de x quando y = 1.900

122. Dada a função C(x) = 500 + 30x, onde x representa a quantidade produzida e C(x) o custo total. Determine o custo total para 1.230 unidades produzidas. Resposta: R$ 37.400

123. Dada a função y = (a.x + 2), determine o valor de a sendo y = 22 e x = 4. Resposta: a = 5

124. Considere a função f(x) = – 0,5x – 38, determine f(90), f(-133), f(200) e f(1.560).

125. Na função de R→R, definida por f(x) = 3x + 1, calcule o valor de:

a) f(120)

b) f(106)

c) f(x) = 463

d) A = $\dfrac{f(235)-f(129)}{106}$

126. A fórmula que dá o número do sapato N em função do comprimento (c) do pé, em centímetros, é $N=\dfrac{5c}{4}+7$.

a) Calcule o tamanho do pé de uma pessoa que calça número 44. Resposta: 33,8 cm

b) Qual o número do calçado de uma pessoa que tem 28 cm de pé. Resposta: 42

127. Dada à função do 1º grau $y = 1-5.x$. Determinar o valor do domínio para:

a) Imagem = 0

b) Imagem = 6

c) Imagem = $\dfrac{1}{5}$

d) Imagem = $-\dfrac{1}{5}$

128. Considere a Função do 1º Grau $y=-2+3.x$. Determine os valores da imagem para que se tenha:

a) x = 0

b) x = 11

c) x = $\dfrac{-1}{2}$

129. Dadas as funções lineares $f(x)=5x-2$ e $g(x)=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{5}$, determine, para cada uma delas:

a) O coeficiente linear

b) O coeficiente angular

c) $f(2)+g(-4)-f\left(\frac{5}{3}\right)$

d) $g(2)+f(-4)-g\left(\frac{5}{3}\right)$

APRESENTAÇÃO DE ALGUMAS FUNÇÕES

Toda Função pode ser representada por uma equação e por um gráfico. Cada função apresenta um tipo diferente de equação e um tipo diferente de gráfico. A função do primeiro grau é composta de três tipos diferentes: função afim, função linear e função constante, cada uma com sua característica e particularidade.

REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE ALGUMAS FUNÇÕES IMPORTANTES DO PRIMEIRO GRAU

As funções têm uso difundido em todas as Ciências, como modelos de fenômenos naturais. Algumas funções descrevem com boa precisão fenômenos comuns, como o escoamento do reservatório de uma caixa d'água, e se tornam ferramentas úteis na experimentação para o conhecimento de aspectos importantes desses fenômenos. Para uma melhor visualização desses fenômenos são utilizados gráficos e tabelas que procuram retratar uma determinada situação.

Esses gráficos e tabelas, em geral, representam funções e por meio deles podemos obter informações sobre as situações que retratam, bem como, sobre as funções que representam.

Os gráficos são importantes, pois tornam compreensíveis e analisáveis resultados numéricos que seriam difíceis de entender e analisar, por exemplo, numa tabela. Se você quiser interpretar certos números, com gráficos a coisa fica mais "visual", mais simples e direta. Há muita informação condensada num gráfico, e se você souber lê-los, com certeza vai ser muito bom pra você!

Para construir o gráfico de uma função no plano cartesiano devemos:

- Construir uma tabela com valores de x, escolhidos convenientemente no domínio D e com valores correspondentes para y;
- A cada par ordenado (x, y) da tabela associar um ponto do plano cartesiano;
- O primeiro elemento do par é associado a um ponto no eixo horizontal e o segundo elemento é associado a um ponto no eixo vertical.
- O encontro das paralelas aos eixos por esses pontos define a representação gráfica

do par funcional;

- Marcar um número suficiente de pontos, até que seja possível esboçar o gráfico da função.

FUNÇÃO AFIM

Uma função do primeiro grau é chamada de função afim se sua sentença for dada por **f(x) = a.x + b**, sendo **a** e **b** constantes reais com $\mathbf{a \neq 0}$:

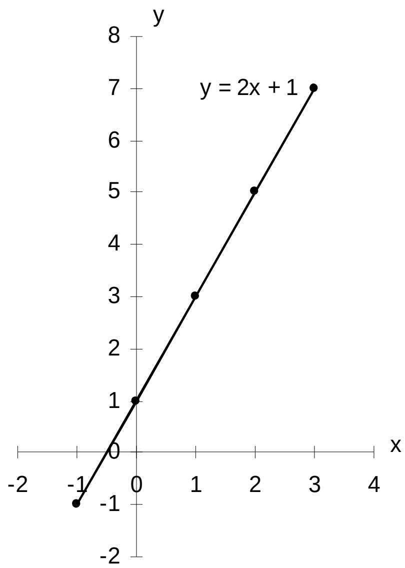
Exemplos de Função Afim.

f(x) = 5x + 2 **f(x) = -x + 3** **f(x) = - 4x + 8** **f(x) = 1.500 + 0,6x**

Gráfico da Função Afim

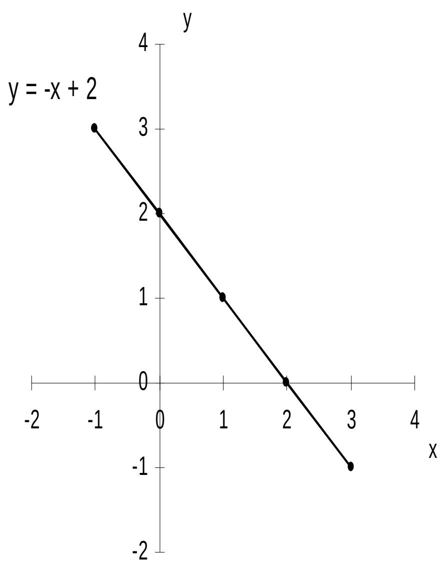
a > 0 → f(x) = 2.x + 1

x	**y**
-1	-1
0	1
1	3
2	5



a < 0 → f(x) = - x + 2

x	**y**
-1	-3
0	2
1	1
2	0



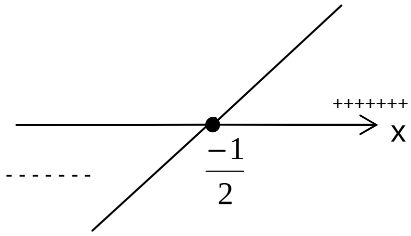
Características da Função Afim

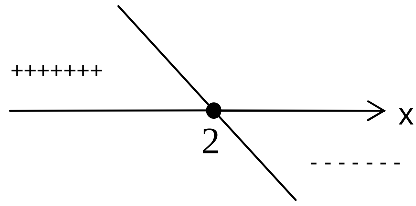
- A função é crescente, pois a > 0;
- Coeficiente angular é a = 2;
- Coeficiente linear é b = 1;
- Raiz da função é 0,5,

Estudo do Sinal

- A função é decrescente, pois a < 0;
- Coeficiente angular é a = -1;
- Coeficiente linear é b = 2;
- Raiz da função é 2,

Estudo do Sinal





f(x) < 0 $\{x \in R \mid x > 0{,}5\}$

f(x) = 0 $\{x \in R \mid x = 0{,}5\}$

f(x) > 0 $\{x \in R \mid x < 0{,}5\}$

f(x) < 0 $\{x \in R \mid x > 2\}$

f(x) = 0 $\{x \in R \mid x = 2\}$

f(x) > 0 $\{x \in R \mid x < 2\}$

FUNÇÃO LINEAR

Uma função do primeiro grau é chamada de função linear se sua sentença for dada por **f(x) = a.x**, sendo **a ≠ 0** e **b= 0**:

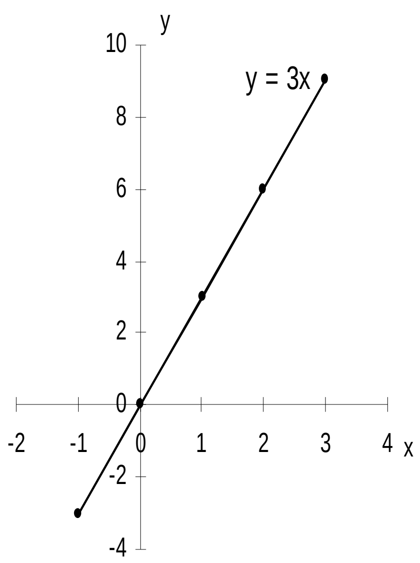
Exemplos de Função Linear

f(x) = 5x **f(x) = -x** **f(x) = - 4x** **f(x) = - 8x**

Gráfico da Função Linear

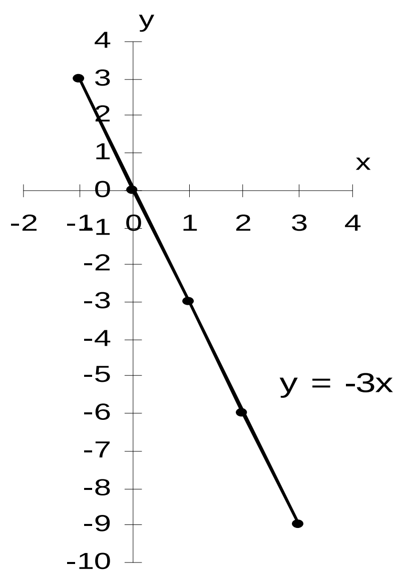
a > 0 → f(x) = 3.x

x	y
-1	-3
0	0
1	3
2	6



a < 0 → f(x) = - 3.x

x	y
-1	3
0	0
1	-3
2	-6



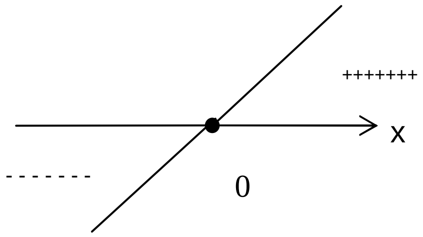
Características da Função Linear

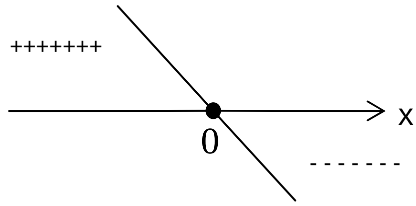
- A função é crescente, pois a > 0;
- Coeficiente angular é a = 3;
- Coeficiente linear é b = 0;
- Raiz da função é 0,

Estudo do Sinal

- A função é decrescente, pois a < 0;
- Coeficiente angular é a = -3;
- Coeficiente linear é b = 0;
- Raiz da função é 0,

Estudo do Sinal





f(x) < 0 {x ∈ R | x > 0}

f(x) = 0 {x ∈ R | x = 0}

f(x) > 0 {x ∈ R | x < 0}

f(x) < 0 {x ∈ R | x > 0}

f(x) = 0 {x ∈ R | x = 0}

f(x) > 0 {x ∈ R | x < 0}

FUNÇÃO CONSTANTE

Uma função do primeiro grau é chamada de função constante se sua sentença for dada por **f(x) = b** , sendo **a = 0** e **b ≠ 0**:

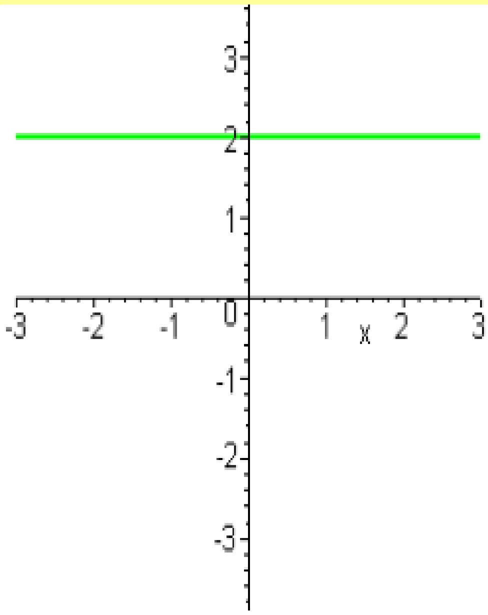
Exemplos de Função Constante.

f(x) = 5 **f(x) = - 8** **f(x) = - 4** **f(x) = 10**

Gráfico da Função Constante

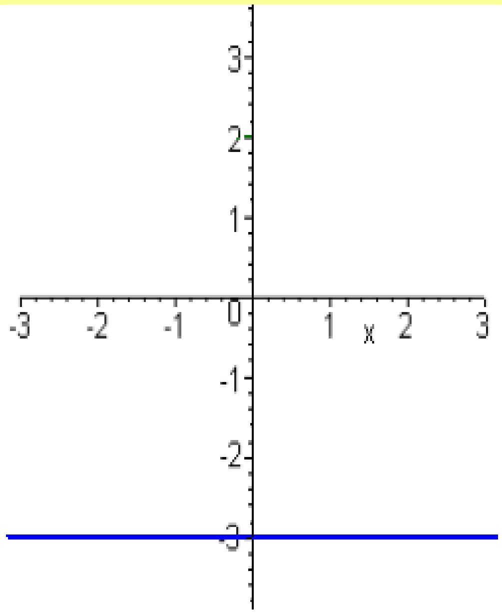
a > 0 → f(x) = 2

X	y
-1	2
0	2
1	2
2	2



a < 0 → f(x) = - 3

x	**y**
-1	**-3**
0	**-3**
1	**-3**
2	**-3**



Características da Função Constante

- A função é constante, pois a = 0;
- Coeficiente angular é a = 0;
- Coeficiente linear é b = 2;
- Não existe raiz da função,
- Não há estudo do sinal da função.

- A função é constante, pois a = 0;
- Coeficiente angular é a = 0;
- Coeficiente linear é b = -3;
- Não existe raiz da função,
- Não há estudo do sinal da função.

Tome Nota:

- Uma função é crescente quando aumentando os valores de x, aumenta os valores de y.
- Apresenta coeficiente angular positivo. **a > 0**
- Uma função é decrescente quando aumentando os valores de x, diminui os valores de y.
- Apresenta coeficiente angular negativo. **a < 0**

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÕES

130. Na função de R→R, definida por $f(x) = 5x - 15$, determine o valor de A = $\dfrac{f(23) - f(29)}{6}$.

131. Considere a função f: IR → IR definida por $f(x) = -4x - 3$, determine:

a) Verifique se a função é crescente ou decrescente.

b) A Raiz da função;

c) O ponto onde a função intersecta o eixo **y**;

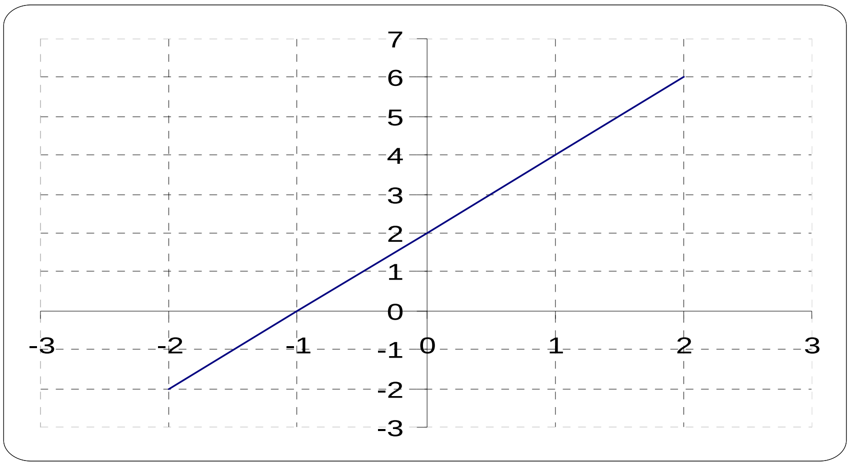
d) O gráfico da função;

e) Faça o estudo do sinal;

132. Construa o gráfico da função dada por $f(x) = 2x + 3$

x	y
0	
1	
2	
3	

133. O gráfico seguinte representa uma função. Indique suas características.



134. Construir a representação gráfica das funções abaixo.

a) $f(x) = -1 + x$

b) $f(x) = 5x$

c) $f(x) = -4x - 2$

d) $f(x) = -3x$

e) $f(x) = -15$

f) $f(x) = 7$

PROBLEMAS ENVOLVENDO FUNÇÕES DO PRIMEIRO GRAU

Do que foi exposto no conceito de função até agora, deve ter ficado claro que:

→ Toda função é um conjunto de pares ordenados (x, y),

→ Os valores de x aparece uma única vez, e em conseqüência, tem apenas uma imagem.

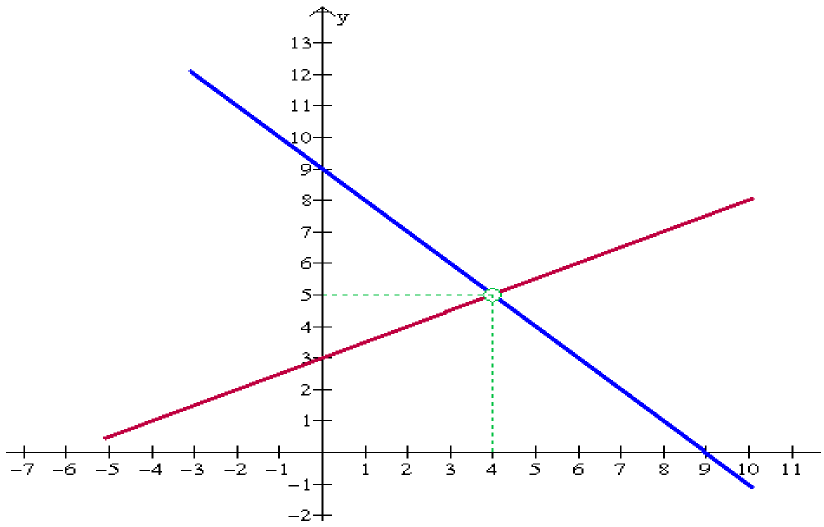
Às vezes o conjunto do domínio tem uma infinidade de elementos, inviabilizando a apresentação de todos os pares da função. Neste caso para definirmos uma função devemos estabelecer uma regra ou uma lei que nos permite identificar todos os valores da imagem de cada elemento do domínio.

Destacamos a seguir algumas maneiras de se encontrar essa regra ou lei da equação.

1º. DETERMINAR O PONTO DE INTERSECÇÃO CONHECENDO DUAS RETAS

O ponto de intersecção de duas retas fornece o mesmo valor de x e o mesmo valor de y para ambas as retas. Graficamente é o ponto onde as duas retas se encontram.

No gráfico abaixo vemos que o ponto P(4, 5) pertencem tanto a reta azul como a reta vermelha, sendo portanto, o ponto de intersecção das retas.



Para determinar o ponto de intersecção de duas retas, podemos utilizar o método da igualdade para sistemas de equações com duas incógnitas ou transformar as equações dadas em sistemas de equações e resolvê-lo pelo método da substituição ou adição.

EXEMPLO RESOLVIDO

Ex 18: *Obtenha o ponto de intersecção das retas: y = - x + 9 e y = 0,5x - 3*

Resolução: Utilizando o método da igualdade, temos:

$$y=-x+9 \Rightarrow 0{,}5x+3=-x+9 \Rightarrow 0{,}5+x=9-3 \Rightarrow 1{,}5x=6 \Rightarrow x=\frac{6}{1{,}5} \Rightarrow x=4$$

Substituindo o valor x = 4 em uma das equações temos: $y=-x+9 \Rightarrow y=-4+9 \Rightarrow y=5$

Portanto o ponto de intersecção entre as duas retas é P (4, 5).

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÕES

135. Dadas às funções $f(x)=ax+4$ e $g(x)=bx+1$, calcule **a** e **b** de modo que os gráficos das funções se interceptem no ponto M(1, 6).

136. Calcular o ponto de intersecção das retas.

a) $y=2x+5$ e $y=3x-\frac{2}{7}$

b) $y=5+6x$ e $y=4x$

c) $y=100-0{,}5x$ e $y=2x-50$

d) $y=12-0{,}2x$ e $y=0{,}6x-3$

e) $y=-2x+5$ e $y=4x+10$

137. Determinar o ponto de intersecção das funções $f(x)=4x$ e $g(x)=50+2x$

138. Chama-se ponto de equilíbrio de mercado o ponto de intersecção entre a reta da equação da Oferta e a reta da equação da Demanda. Considere a função de demanda de um produto dada por $p=-0{,}002x+10$ e a função da oferta dada por $p=0{,}005+4$, determine o ponto de equilíbrio.

139. Uma pessoa vai escolher um plano de saúde entre duas opções: Unidoctor e Palmeiras Saúde.

- A função que dá o valor total gasto do plano Unidoctor é $C(x)=120+45x$
- A função que dá o valor total gasto do plano Saúde Verde é $C(x)=200+35x$

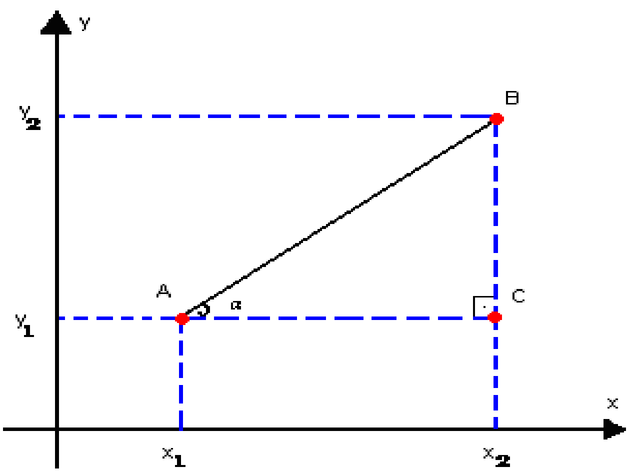
Determine em que condições os dois planos são equivalentes.

140. Chama-se ponto critico ou ponto de nivelamento o ponto de intersecção entre a reta da equação do Custo Total e a reta da equação da Receita. Considere a função do Custo Total de um produto dada por $C(x)=1.500+100x$ e a função da Receita dada por $C(x)=120x$, determine o ponto de nivelamento para essa situação.

2º. DETERMINAR O PONTO DE INTERSECÇÃO DAS RETAS CONHECENDO DOIS PONTOS OU O GRÁFICO

Como já sabemos, uma função do primeiro grau é definida por **y = a.x + b**. Portando, para encontrar a equação conhecendo dois pontos ou o gráfico da função devemos identificar os valores do coeficiente angular **a** e o coeficiente linear **b**.

Observe o gráfico abaixo:



O coeficiente angular **a** é a tangente do angulo α, ou seja:

$$tg\alpha=\frac{Cateto\ Oposto}{Cateto\ Adjacente}$$

Portanto para encontrar o valor do coeficiente angular de uma reta a partir das coordenadas de dois de seus pontos fazemos: $a = \frac{Cateto\ Oposto}{Cateto\ Adjacente} \Rightarrow a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Para encontrar o valor do coeficiente linear de uma reta a partir das coordenadas de dois de seus pontos fazemos $b = y - a.x$, onde **x** e **y** são as coordenadas de um dos pontos e **a** o coeficiente angular calculado anteriormente.

EXEMPLOS RESOLVIDOS

Ex 19: *Obter uma função a partir dos pontos A(1, 2) e B(2, 7), ou seja, f(1) = 2 e f(2)*

Resolução: Fazendo $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $y_1 = 2$ e $y_2 = 7$.

Calculo do Coeficiente angular **a**

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow a = \frac{7-2}{2-1} \Rightarrow a = 5$$

Cálculo do Coeficiente Linear **b**

$$b = y - a.x \Rightarrow b = 2 - 5.1 \Rightarrow b = -3$$

Substituindo os valores encontrados na equação y = a.x + b, obtemos a função procurada:

$$f(x) = 5.x - 3 = ou\ \ y = 5.x - 3$$

Ex 20: *O dono da Pizzaria Água na Boca verificou que quando o preço de uma pizza é R$ 20,00, são vendidas 150 por dia. Se o preço aumentar para R$ 22,00 o total de pizzas vendidas cai para 130 unidades por dia. Nessas condições determine:*

a) A Função Demanda que relaciona o preço y das pizzas em função da quantidade x de unidades vendidas.

b) O preço necessário para que sejam vendidas 200 pizzas por dia.

c) Quantas unidades são vendidas quando o preço for de R$ 25,00?

Resolução:

a) Calculo da Função Demanda

	x	y	
x_1	150	20	y_1
x_2	130	22	y_2

Calculo do Coeficiente angular a

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow a = \frac{22-20}{150-130} \Rightarrow$$

$$a = \frac{-2}{20} \Rightarrow a = -0{,}1$$

Cálculo do Coeficiente Linear b

$$b = y - a.x \Rightarrow b = 20 - 150.(-0{,}1) \Rightarrow$$

$$b = 20 + 15 \Rightarrow b = 35$$

Substituindo os valores encontrados na equação y = a.x + b, obtemos a função procurada: $f(x) = -0{,}1.x + 35 = ou\ \ y = -0{,}1.x + 35$

b) Como já sabemos a função que relaciona o preço de venda em função da quantidade x, fazemos:

$y = -0{,}1.x + 35 \Rightarrow y = -0{,}1.200 + 35 \Rightarrow y = -20 + 35 \Rightarrow y = 15$

c) Para encontrar a quantidade vendida, substituímos o valor de y pelo preço sugerido, então:

$$y = -0{,}1.x + 35 \Rightarrow 25 = -0{,}1.x + 35 \Rightarrow ,1x = +35 - 25 \Rightarrow 0{,}1x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{0{,}1} \Rightarrow x = 100$$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÕES

141. Determine o coeficiente angular e o coeficiente linear da reta que passa pelos pontos.

a) A(3, 2) e B(-3, -1)
b) C(1, 2) e D(3, 8)
c) E(-3, -5) e F(-1, -0)
d) G(200, 100) e H(300, 80)
e) P(0,2; 4) e Q(0,5, 8)

142. O dono da Panificadora Soneca verificou que quando o preço de um pão é R$ 0,30, são vendidas 1.500 unidades por dia. Se o preço aumentar para R$ 0,40 o total de pães vendidos cai para 1.300 unidades por dia. Determine a função que relaciona o preço y dos pães em função da quantidade x de unidades vendidas.

143. Escrever a equação da reta que contém os pontos:

a) P = (0, 0) e Q = (2, 4)
b) P = (0, 3) e Q = (8, 3)
c) P = (1,5; 4) e Q = (2, 6)
d) P = (2, 10) e Q = (8, 1)
e) P = (2, 20) e Q = (8, 50)

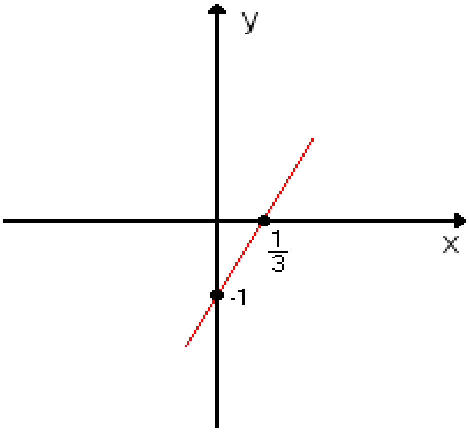
144. Escreva a função afim f(x) = a.x + b, sabendo que:

a) f(1) = 5 e f(-3) = - 7
b) f(-1) = 7 e f(2) = 1
c) f(1) = 5 e f(-2) = - 4

145. A reta, gráfico de uma função afim, passa pelos pontos (-2, -63) e (5, 0). Determine essa função e calcule f(16).

146. Dada a função y = (a.x + 2), determine o valor de a sendo y = 4 e x = 22.

147. Determine a lei da função cuja reta está representa no gráfico abaixo:



148. Determine a lei da função cuja reta intersecta os eixos em (-8, 0) e (0, 4) e verifique:

a) Se a função é crescente ou decrescente;

b) A raiz da função;

c) O gráfico da função;

d) Calcule f(-1).

149. Dada a função y = a.x + b e sabendo-se que para y = 3 tem-se x = 5 e para y = -2 tem-se x = -5 calcule qual será o valor de x para y = 5.

150. Um vendedor recebe mensalmente um salário composto de duas partes: uma parte fixa, no valor de R$ 1.000,00 e uma parte variável que corresponde a comissão de 12% do total das vendas que ele faz durante o mês.

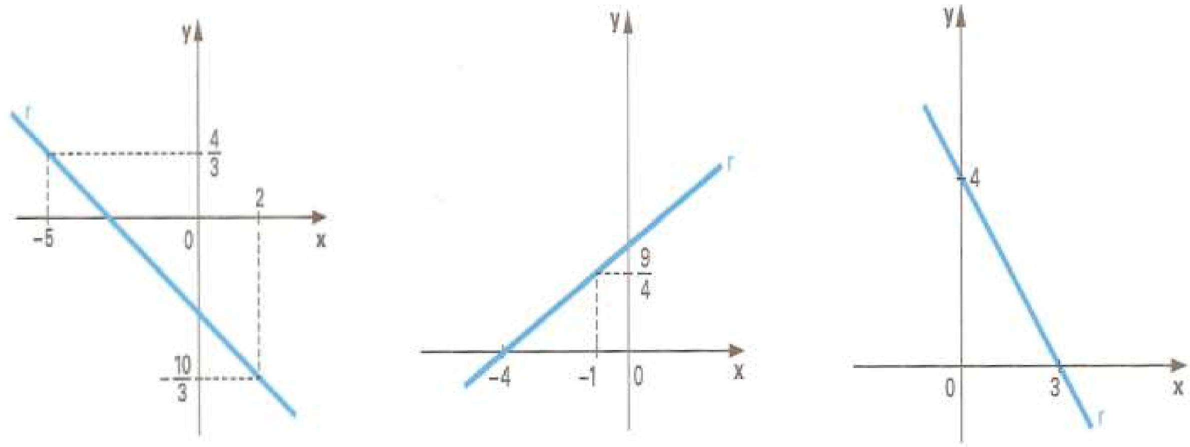
a) Expressar a função que representa seu salário mensal.

b) Calcule o salário mensal do vendedor, sabendo que a venda foi R$ 10.000,00 em produtos.

c) Determine a quantidade vendida sabendo que o valor recebido foi de R$ 3.500,00

151. Dados os gráficos das funções de R em R, escreva a função f(x) = a.x + b correspondente.

a) b) c)



3º. REGRESSÃO LINEAR

Análise de regressão é uma técnica de modelagem utilizada para analisar a relação entre uma variável dependente (y) e uma ou mais variáveis independentes $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. O objetivo dessa técnica é identificar (estimar) uma função que descreve, o mais próximo possível, a relação entre essas variáveis e assim podermos predizer o valor que a variável dependente (y) irá assumir para um determinado valor da variável independente x.

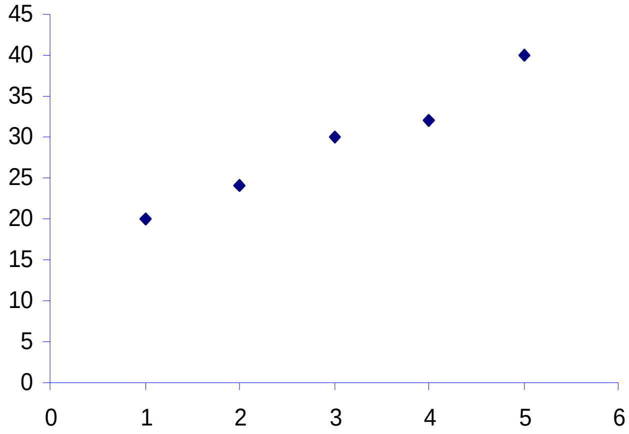
Exemplos de relação entre variáveis são o consumo em relação à taxa de inflação; a produção de leite e temperatura ambiente; a resistência de um material e sua composição química; o número de peças com defeitos e a manutenção das máquinas; receita e gasto com publicidade e etc.

Uma aplicação muito comum envolvendo regressão linear é aproximar um conjunto de pontos por uma reta e escrever a função que a define.

Suponha que uma empresa anote diariamente a quantidade vendida de um produto conforme a tabela abaixo.

Dias (x)	1	2	3	4	5
Quantidade Vendida (y)	20	24	30	32	44

O gráfico dos valores observados é, então:



Podemos perceber pelo gráfico que os pontos não pertencem à mesma reta, porém, eles estão muito próximos de uma, o que nos dá a possibilidade de passar uma reta entre os pontos para observar o crescimento das vendas e prever o que deverá ocorrer nos próximos dias, isto é, fazer uma estimativa das vendas para o dia seguinte.

A reta **y = a.x + b** que melhor aproxima esse conjunto de pontos é chamada de reta de regressão e é calculada através do Método dos Mínimos Quadrados. (MMQ)

→ O valor de a é calculado pela expressão: $a = \dfrac{\sum x.y - n.\bar{x}.\bar{y}}{\sum x^2 - n.\left(\bar{x}\right)^2}$

→ O valor de b é calculado pela expressão $b = \bar{y} - a.\bar{x}$, onde:

- $\sum x.y$: é a soma dos produtos de x pelo respectivo y
- n: é o número de pontos ou observações
- $\bar{x}$: é a média aritmética dos valores de x, ou seja, $\bar{x} = \dfrac{\sum x}{n}$
- $\bar{y}$: é a média aritmética dos valores de y, ou seja, $\bar{y} = \dfrac{\sum y}{n}$
- $\sum x^2$: é a soma dos quadrados dos valores de x observados

Para facilitar os cálculos é conveniente colocar os dados em uma tabela, para aferir os valores que irão compor a fórmula.

x	**y**	**x.y**	**x^2**

x_1	y_1	$x_1.y_1$	x_1^2
x_2	y_2	$x_2.y_2$	x_2^2
x_3	y_3	$x_3.y_3$	x_3^2
x_4	y_4	$x_4.y_5$	x_4^2
x_n	y_n	$x_n.y_n$	x_n^2
Σx	Σy	$\Sigma x.y$	Σx^2

EXEMPLO RESOLVIDO

Ex 21: *Determine a função que melhor aproxima o conjunto de pontos:*

Dias (x)	1	2	3	4	5
Quantidade Vendida (y)	20	24	30	32	44

Resolução:

x	**y**	**x.y**	$\mathbf{x^2}$
1	20	20	1
2	24	48	4
3	30	90	9
4	32	128	16
5	44	220	25
$\Sigma x = 15$	$\Sigma y = 150$	$\Sigma x.y = 476$	$\Sigma x^2 = 55$

Cálculo das médias:

$$\bar{x}=\frac{\sum x}{n} \Rightarrow \bar{x}=\frac{15}{5} \Rightarrow \bar{x}=3 \qquad \bar{y}=\frac{\sum y}{n} \Rightarrow \bar{y}=\frac{150}{5} \Rightarrow \bar{y}=30$$

Substituindo esses valores na fórmula, obtém-se:

$$a=\frac{\sum x.y-n.\bar{x}.\bar{y}}{\sum x^2-n.\left(\bar{x}\right)^2} \Rightarrow a=\frac{476-5.3.30}{55-5.3^2} \Rightarrow a=\frac{476-450}{55-45}\, a=\frac{26}{10} \Rightarrow a=2,6$$

$$b=\bar{y}-a.\bar{x} \Rightarrow b=30-2,6.3 \Rightarrow b=30-7,8 \Rightarrow b=22,2$$

Logo a função que melhor aproxima o conjunto de pontos é **y = 2,6x + 22,2**

Com a fórmula podemos fazer uma projeção para o dia seguinte, fazendo x = 6, temos que:

$$y=2,6x+22,2 \Rightarrow y=2,6.6+22,2 \Rightarrow y=15,6+22,2 \Rightarrow y=37,8$$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÕES

152. Calcule a equação da reta que melhor aproxima o conjunto de pontos:

a) P = (0, 0); Q = (2, 4); R = (3, 7); S = (4, 10)

b) P = (1, 3); Q = (2, 6); R = (4, 10); S = (5, 9)

c) P = (200, 150); Q = (220, 180); R = (250, 210); S = (280, 220); T = (290, 250)

d) P = (1500, 2000); Q = (1800, 1800); R = (2100, 1500); S = (2300, 1400); T = (2900, 1300)

153. Suponha um fabricante que gasta um valor fixo para a confecção de frascos de vidro e um valor variável para a produção de cada frasco. Vendo que os valores não obedeciam a uma linearidade, foi elaborada uma sentença matemática com base na tabela a seguir. Nessas condições qual a sentença matemática que mais aproxima esse conjunto de pontos?

x = quantidade	15	18	25	31	40	54	60	79	86
y = custo	15,00	19,00	30,00	42,00	52,00	68,00	79,00	91,00	101,00

154. Em uma determinada região do país foram coletados os índices pluviométricos e a produção de leite do tipo C. Sabendo-se que existe uma previsão para o próximo ano de um índice pluviométrico de 24 mm determine então a produção estimada de leite dessa região.

Índice Pluviométrico (x)	23	21	28	27	23	28	27	22	26	25
Produção em 10^6 (y)	26	25	31	29	27	31	32	28	30	30

155. Um motorista anotou os valores cobrados para alguns quilômetros percorridos conforme a tabela:

x = km percorrido	10	15	17	20	40	45	52	60
y = valor cobrado	12,50	14,00	17,00	21,00	50,00	60,00	71,00	79,00

a) Qual a equação da reta que melhor aproxima o conjunto de pontos anotados?

b) Qual é a previsão de cobrança para 30 e 100 quilômetros?

c) Quanto quilômetro terá percorrido o táxi para que o valor pago seja R$ 90,00?

d) Quanto quilômetro terá percorrido o táxi para que o valor pago seja R$ 120,00?

156. Seja x o investimento em publicidade e y o lucro para uma certa empresa no ano. Tem-se a tabela seguinte em que os valores de x e y estão em dezenas de milhares de reais. Determine a equação da reta que melhor aproxima esse conjunto de pontos

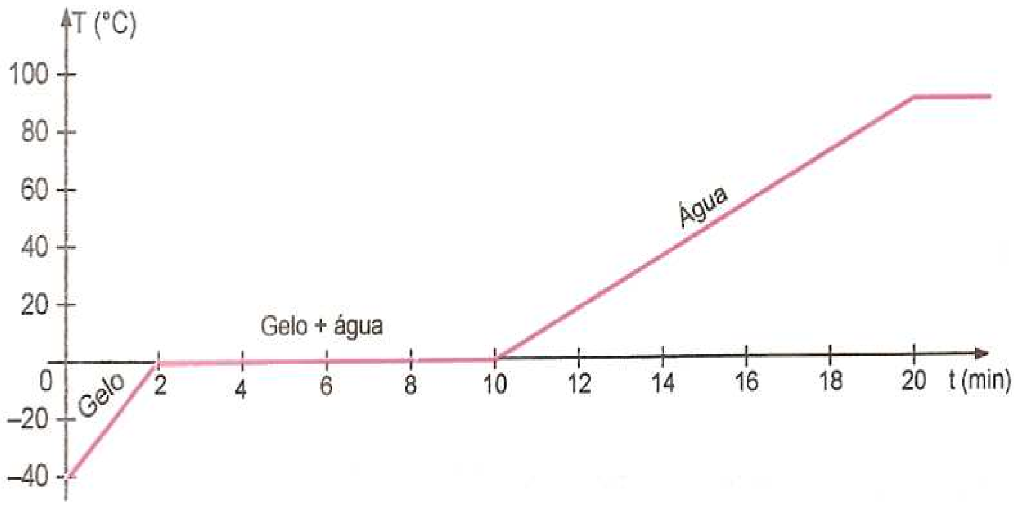
Y	50	40	80	100	120	90	150	140
Y	500	400	750	900	1.300	800	1.500	1.600

4º. FUNÇÃO DEFINIDA POR VÁRIAS SENTENÇAS

Uma função, f de R em R, pode ser definida por uma lei de formação, formada por mais de uma sentença. Num subconjunto D_1 do domínio ela é dada através de uma sentença, em outro subconjunto D_2, ela é definida por outro lei, e assim sucessivamente.

Vejamos a seguinte situação.

Um recipiente contendo uma barra de gelo a – 40º é colocado sobre a chama de um fogão. Nessas condições, o gráfico abaixo mostra-nos a evolução da temperatura da água em função do tempo.



Observe, por esse exemplo, que o gráfico é definido por três sentenças.

Para o intervalo de $0 \leq x < 2$ minutos o gráfico assume uma lei de formação, para o intervalo de $2 \leq x < 10$ minutos é uma função constante e de $10 \leq x < 20$ minutos temos novamente uma função afim, definida por outra lei de formação.

Por vezes os fenômenos estudados se comportam de maneiras diferentes em diferentes estágios de sua observação, o que nem sempre é possível definir uma função através de uma única sentença.

Essas funções são freqüentemente estudadas na Física, na Biologia, na Química, na Economia, na Estatística, etc.

Exemplos de funções definidas por várias sentenças:

a) $f(x) = \begin{cases} x+1, se\, x \leq 2 \\ -x+3, se\, x > 2 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 2x+5, se\, x\ for\ par \\ x-3, se\, x\ for\ impar \end{cases}$

EXEMPLO RESOLVIDO.

Ex 22: *Considere a função f(x) definida por* $f(x)=\begin{cases}3x+5, se\, x<-3\\ 2x+3, se\, 2<x<5\\ -x-3, se\, x\geq 7\end{cases}$ *Calcule o valor de:*

a) f (8)

b) f (- 4)

c) f (3)

d) f (7)

Resolução:

Cálculo de f(8). Como 8 > 7, usamos a terceira sentença f(x) = -x - 3.

$f(x)=-x-3 \Rightarrow f(8)=-8-3 \Rightarrow f(8)=11$

Cálculo de f(-4). Como - 4 < - 3, usamos a primeira sentença f(x) = 3x + 5.

$f(x)=3x+5 \Rightarrow f(-4)=3.(-4)+5 \Rightarrow f(-4)=-12+5 \Rightarrow f(-4)=-7$

Cálculo de f(3). Como 2 < 3 < 5 usamos a segunda sentença f(x) = 2x + 3.

$f(x)=2x+3 \Rightarrow f(3)=2.3+3 \Rightarrow f(3)=6+3 \Rightarrow f(3)=9$

Cálculo de f(7). Como 7 $\geq$ 7 usamos a terceira sentença f(x) = - x - 3.

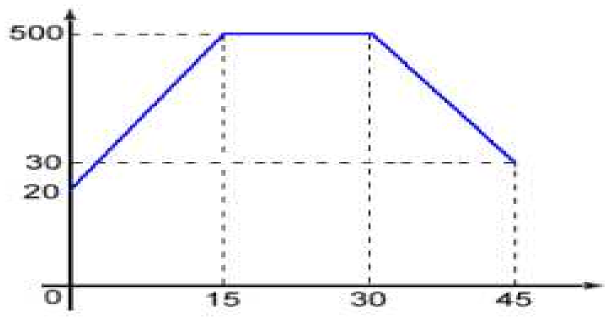
$f(x)=-x-3 \Rightarrow f(7)=-7-3 \Rightarrow f(7)=-10$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÕES

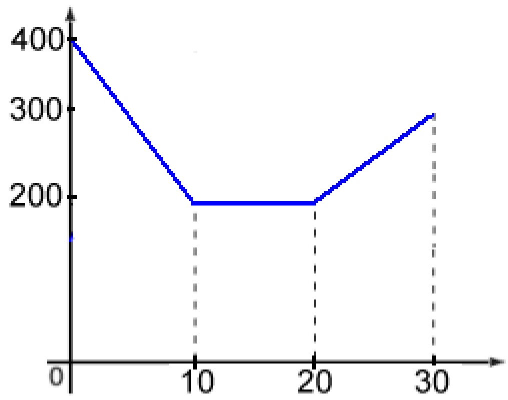
157. Dada a função f de R em R definida por $f(x)=\begin{cases}2, se\, x\ for\ irracional\\ -1 se\, x\ for\ racional\end{cases}$ determine o valor da expressão: $E=\dfrac{f(\sqrt{9})+f(-3)-f(\sqrt{7})}{f(4)-f(\pi)}$

158. Construa o gráfico da função definida por: $f(x)=\begin{cases}-x+1, se\, x\geq 2\\ x, se\, -2<x<2\\ -2, se\, x\leq -2\end{cases}$

159. A temperatura de um forno de uma olaria varia linearmente de 20 ^{0} C a 500 ^{0} C de zero minutos a 15 minutos, a partir daí, até 30 minutos sua temperatura permanece constante e depois volta a esfriar. Determine a lei que expressa a temperatura do forno em função do tempo.



160. Considere a função cujo gráfico está representado a seguir e calcule:



a) f (10) b) f (30) c) f (x) = 400

161. Em um açougue o preço do quilograma de um tipo de carne é R$ 4,00. Durante certo período foi feita a seguinte promoção:

- Na compra de uma quantia entre 3 kg e 5 kg, desconto de R$ 1,00 no total.
- Na compra de 5 kg ou mais, desconto de 10% no total.

a) Determine a equação da quantia Q a ser paga em função da quantidade x de quilogramas comprados nos dois casos.

b) Determine a quantia a ser paga na compra de 2 kg, 4 kg e 5 kg.

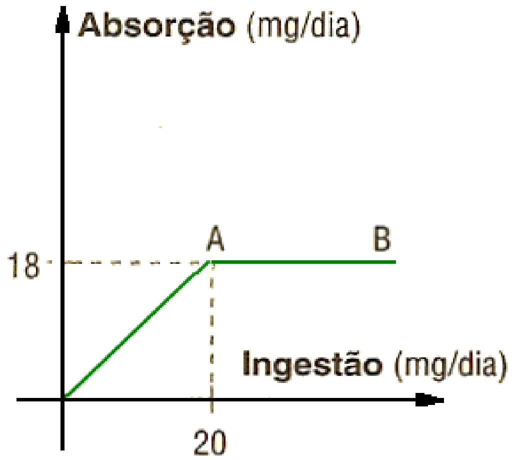
c) Determine a quantidade que se pode comprar com R$ 17,00.

162. Dada a função f(x) definida por: $f(x)=\begin{cases} 3x+5, se\ x<-3 \\ 2x+3, se\ 2<x<5 \\ -x-3,, se\ x\leq 7 \end{cases}$ determine o valor da expressão: $R=\dfrac{f(8)+f(-4)-2.f(3)}{f(4)-f(-5)}$

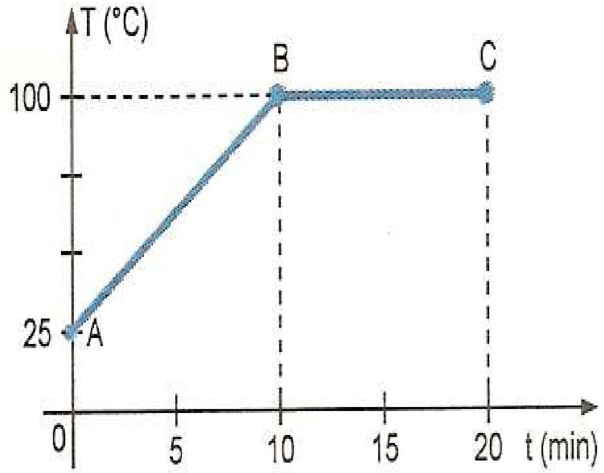
163. O gráfico abaixo representa a relação entre a ingestão de certo remédio em mg/dia, e sua absorção pelo organismo, também em mg/dia.

a) Determine a quantidade absorvida pelo organismo quando são ingeridas 10 mg/dia.

b) A absorção resultante da ingestão de mais de 20 mg/dia e igual á absorção resultante da ingestão de 20 mg/dia?



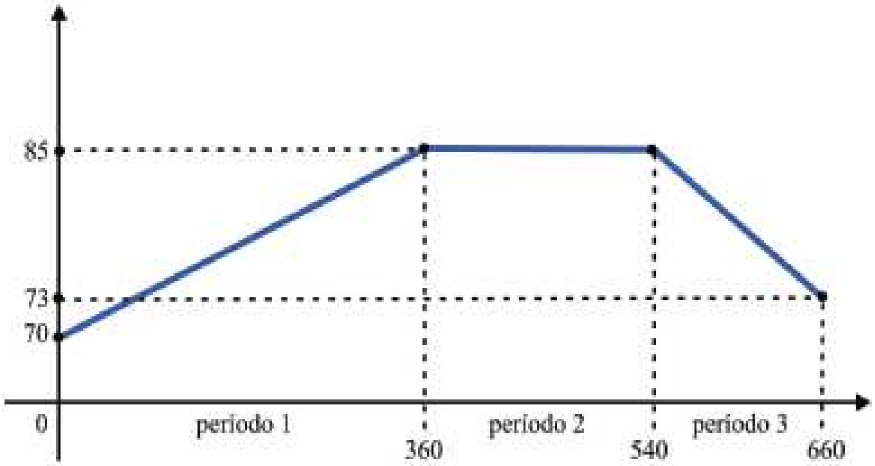
164. Um físico aqueceu certa quantidade de água até ela começar a ferver. Seu objetivo era estudar a variação de temperatura desse liquido em função do tempo de aquecimento. Para tanto, a cada minuto, ele mergulhava um termômetro na água e lia a temperatura, Procedendo assim, construiu o gráfico a seguir, que relaciona a temperatura T (em graus Celsius) e o tempo t (em minutos). Determine a função descoberta pelo físico.



165. Dada a função f(x) definida por: $f(x)=\begin{cases} x+5, se\ x<3 \\ x+3, se\ 3\leq x\geq 6 \\ x+3,, se\ x>6 \end{cases}$ determine o valor da expressão: $R=\dfrac{f(2)+f(7)+f(3)}{f(4)+f(7)}$

166. Suponha que o consumo normal diário de energia de um trabalhador seja de 2.100 kcal e que o total de calorias correspondentes aos alimentos ingeridos que excede esse valor seja armazenado no organismo, na forma de gordura. O gráfico abaixo representa a evolução da massa corporal, em kg, desse indivíduo em um período de

660 dias.

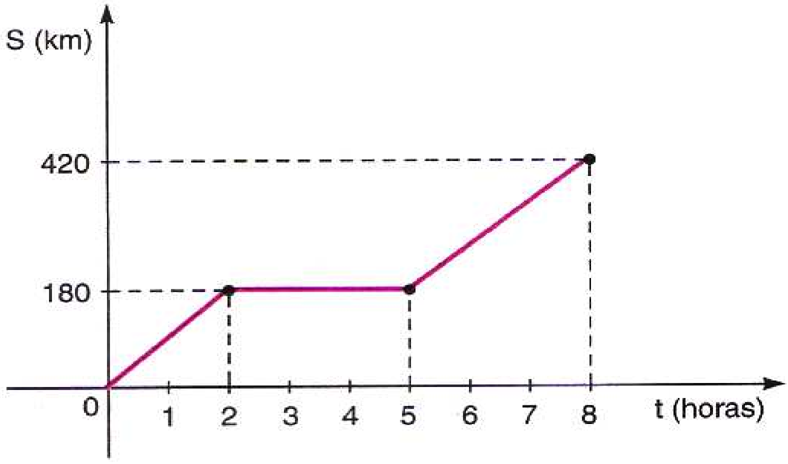


Observando o gráfico e atento aos detalhes da questão, faça o que se pede nos itens.

a) Determine a função cujo gráfico corresponde ao período 1.

b) Determine a função cujo gráfico corresponde ao período 3 e descubra quanto tempo se passará até o individuo voltar a ter 70 kg considerando que a taxa de variação da massa em relação ao tempo continue a mesma.

167. O gráfico mostra a relação entre o espaço S percorrido e o tempo t gasto por um motorista em uma viagem. No eixo horizontal está representado o tempo (t), em horas, gasto no percurso e no eixo vertical a distância (S) percorrida, em quilômetros. Observando o gráfico, você poderia dizer que esse motorista ficou parado em algum momento da viagem? Caso a resposta seja afirmativa, quantas horas esse motorista permaneceu parado?



FUNÇÕES DO PRIMEIRO GRAU NA ECONOMIA

Funções de Oferta e Demanda do Primeiro Grau

Uma das definições de "curva de demanda" (procura) é a seguinte: "A curva de demanda é uma construção teórica que nos diz quantas unidades de um determinado bem de consumo os consumidores estarão desejosos de comprar, durante um período de tempo, a todos os possíveis preços, presumindo-se que os gostos dos consumidores, os preços das outras mercadorias e as rendas dos consumidores se mantenham inalterados".

Ex: No verão há grande **demanda** por cerveja;

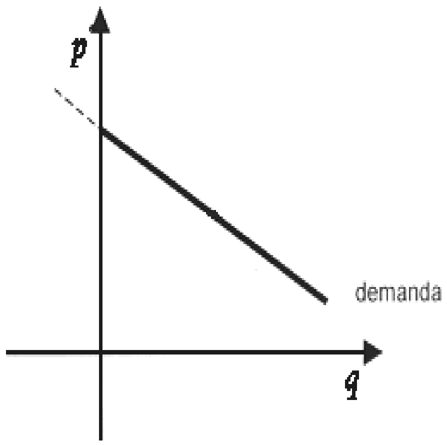
Na mesma linha, a “curva de oferta" é uma construção teórica que nos diz quantas unidades os produtores de uma mercadoria em determinada indústria estão dispostos a vender em um certo período de tempo.

Ex: Na páscoa há uma grande **oferta** de ovos de chocolate.

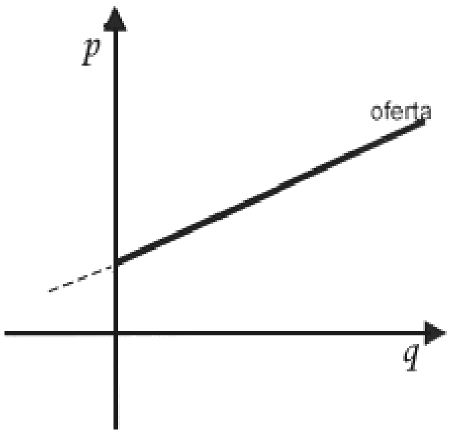
Na prática, algumas curvas de oferta e demanda são aproximadamente lineares na faixa de valores que interessa; outras são não-lineares. No entanto, mesmo nesses casos, as equações lineares podem oferecer representações de oferta e demanda razoavelmente precisa dentro de uma faixa limitada.

A figura A mostra a representação de uma equação da demanda e a figura B mostra a representação de uma equação da oferta.

a)



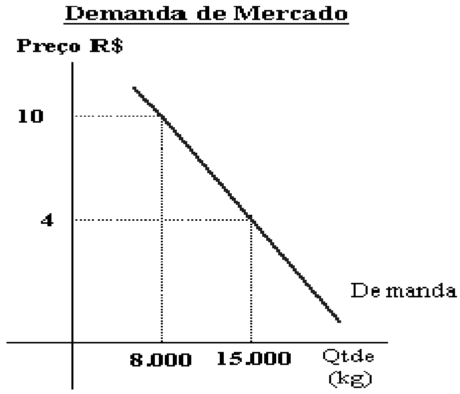
b)



CURVA DE DEMANDA LINEAR

Definição: Quantidade de mercadoria ou serviço que um consumidor ou conjunto de consumidores estão dispostos a comprar, a determinado preço:

O gráfico ao lado representa o comportamento da demanda em relação a um produto genérico. Quando o preço está em um nível elevado, a demanda pelo produto é menor, ou seja, uma boa parte dos consumidores não está disposta a adquirir o produto a este nível de preço.



No gráfico, ao preço de R$ 10,00 teremos somente 8.000 quilos vendidos.

Se o preço está em um nível mais baixo, a demanda pelo produto será maior, pois mais consumidores estarão dispostos a adquirir o produto àquele nível de preço.

Nota-se no gráfico que ao preço de R$ 4,00 haverá 15.000 quilos vendidos.

Este comportamento da demanda é devido às diferentes restrições orçamentárias dos consumidores, em outras palavras, cada consumidor possui um determinado nível de renda, mais elevado ou mais baixo, e, portanto, seu consumo se dará de acordo com esta renda. Por isso, o consumidor que possui uma renda mais alta continuará adquirindo o produto mesmo a um preço elevado, mas aquele que possui renda mais baixa, estará impossibilitado de adquirir o produto para não prejudicar o seu orçamento; ocorre uma queda da demanda.

Quando o preço cai, os consumidores de baixa renda voltam a adquirir o produto e há um aumento da demanda.

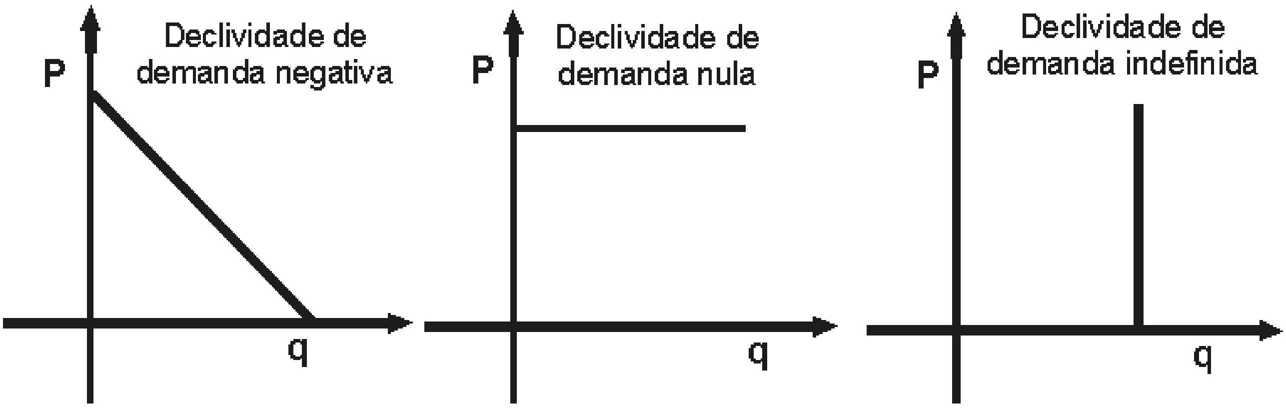
Exemplo: Se a carne bovina estiver com preço médio de R$ 10,00 o quilo, muitos consumidores não poderão consumi-la, e passarão, desta forma, a consumir outro tipo de alimento, tais como carne de frango, peixes, ovos, etc., com isso, haverá uma queda na demanda por carne bovina devido ao preço elevado.

Mas, se o preço médio da carne bovina cair para R$ 4,00 o quilo, vários consumidores voltarão a comprar carne bovina, conseqüentemente haverá um aumento na demanda por carne bovina.

Normalmente, a declividade de uma curva de demanda linear é negativa, isto é, à medida que o preço aumenta, a quantidade procurada diminui (e à medida que o preço diminui, a quantidade procurada aumenta), isto é, a função de demanda linear é geralmente decrescente.

Em certos casos, a declividade de uma curva de demanda pode ser nula. Isto é, o preço é constante, independentemente da demanda.

Em outros casos, a declividade de uma curva de demanda pode ser indefinida, isto é, a procura é constante, independentemente do preço.



Nos casos em que a função da demanda é negativa é importante determinar sua equação para fazer conjecturas e poder prever o comportamento do mercado.

EXEMPLO RESOLVIDO

Ex 23: *Em um grande frigorífico verificou-se que quando o preço do quilo da carne é de dez reis, 9.000 quilos do produto são vendidos na semana. Se o preço abaixar para quatro reais, 15.000 quilos do produto são vendidos por semana. Nessas condições determine:*

a) A equação da demanda admitindo que seja uma função do primeiro grau.

Resolução:

Como a função é do primeiro grau do tipo, p = a.q + b, temos que calcular o coeficiente angular **a** e o coeficiente linear **b**.

O Coeficiente angular é dado por:

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\Rightarrow a=\frac{4-10}{15.000-9.000}\Rightarrow a=\frac{-6}{6.000}\Rightarrow a=-0{,}001$$

O coeficiente linear é dado por:

$$b=y-a.x\Rightarrow b=10-(-0{,}001).9.000\Rightarrow b=10+9\Rightarrow b=19$$

Assim a equação da demanda é p = - 0,001q + 19, onde p é o preço e q a quantidade vendida.

b) Quantos quilos do produto são vendidos se o preço for de R$ 7,00.

Substituindo o valor do preço na equação da demanda encontrada, fica:

$$p=-0{,}001.q+19\Rightarrow 7=-0{,}001.q+19\Rightarrow 0{,}001.q=19-7\Rightarrow q=\frac{12}{0{,}001}\Rightarrow 12.000$$

c) A que preço o frigorífico terá uma venda de 10.000 quilos de carne.

Substituindo o valor da quantidade na equação da demanda encontrada, fica:

$$p=-0{,}001.q+19\Rightarrow p=-0{,}001.10.000+19\Rightarrow p=-10+19\Rightarrow p=9$$

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÕES

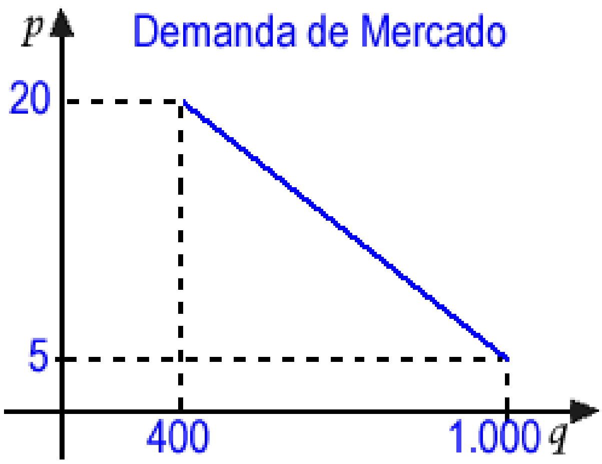
168. Numa relojoaria 10.000 relógios são vendidos quando seu preço é R$ 60,00 e 20.000 relógios são vendidos quando seu preço é R$ 40,00. Qual é a equação da demanda, sabendo que ela é linear? Esboce o gráfico dessa função.

169. Quando o preço é R$ 90,00 nenhum relógio é vendido; quando os relógios são liberados gratuitamente, 30.000 são procurados. Qual é a equação da demanda sabendo que ela é linear? Esboce seu gráfico.

170. Um certo produto tem equação de demanda $2q + 4p - 6 = 0$, onde p é o preço unitário e q o número de milhares de unidades. Determine o preço por unidade para uma demanda de 1.000 unidades e determine a demanda se o produto for oferecido gratuitamente.

171. Num estacionamento pra automóveis, o preço por dia de estacionamento é R$ 20,00 e a esse preço estacionam 50 automóveis por dia. O proprietário acredita que, se reduzir o preço em 20% terá um aumento de 25% no número de automóveis estacionados. Admitindo linear a curva de demanda obtenha a sua equação.

172. O gráfico abaixo representa a função de demanda de um produto em função da quantidade vendida q. Quantas unidades são vendidas quando o preço for de R$ 6,00?



173. Uma locadora verificou que, quando o preço unitário de cada dvd era de R$ 4,00 o número de dvd alugados era 170 por semana. Verificou também quando preço passava para R$ 3,00 a quantidade alugada era de 200 unidades. Assim sendo determine:

a) Qual sua função demanda?

b) Quantos DVD são alugados se o preço for de R$ 2,50?

c) Se em determinada semana foram alugados 150 dvd, qual foi o preço praticado?

174. Uma determinada empresa vendia 3.000 unidades por mês de seu produto quando praticava um preço de R$ 6,00. Num determinado momento, passou a praticar o preço de R$ 4,00, vendendo 4.000 unidades por mês do produto. Construa uma tabela e um gráfico demonstrando a situação. Deduza a equação da demanda para, logo após responder quantas unidades se estará disposto a comercializar caso o preço passe a ser R$ 25,00?

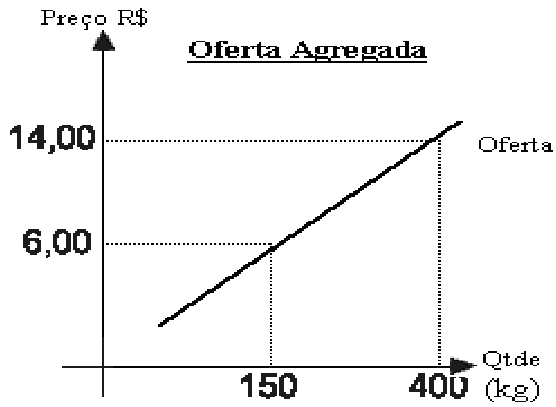
175. A Demanda de mercado de um produto que é vendido em galões é dada por p = -120 q + 9.600. A que preço a quantidade vendida será de 4.500 galões?

176. O preço do leite foi congelado por 6 meses, no valor de R$ 1,40. Qual é a equação de demanda nesse período? Qual o gráfico da curva de demanda?

CURVA DE OFERTA LINEAR

Definição: Quantidade de mercadoria ou serviço que um produtor ou conjunto de produtores está disposto a vender, a determinado preço.

Neste gráfico podemos observar o comportamento da oferta em relação a um produto genérico. Com o nível de preço elevado, os produtores tendem a ofertar uma quantidade maior do produto. Se o preço estiver em R$ 14,00 (veja gráfico), a quantidade colocada no mercado será de 400 unidades.

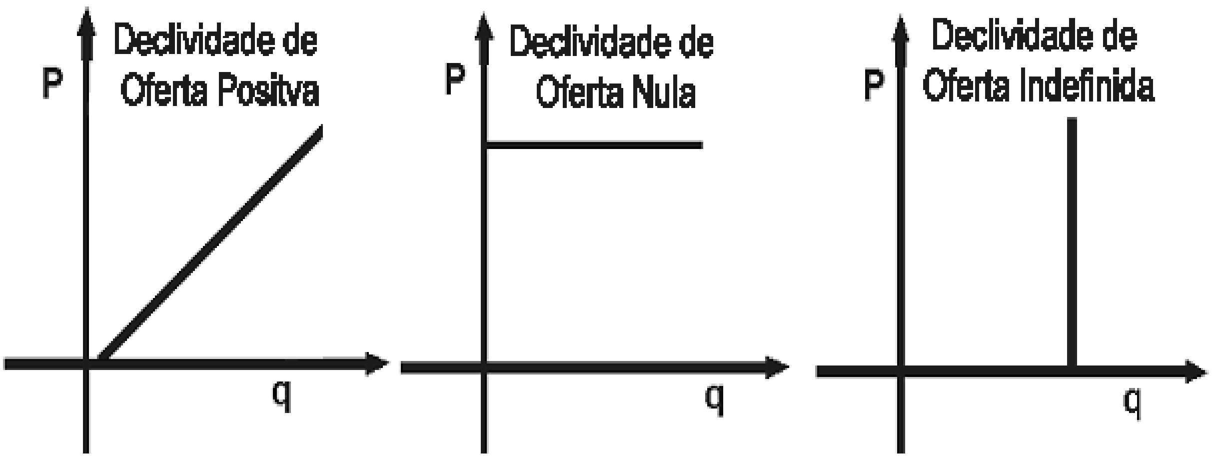


Mas, se o nível de preço cair para R$ 6,00, muitos produtores deixarão de ofertar a mercadoria, e a este preço teremos uma oferta de 150 unidades, ocasionando uma queda na quantidade ofertada.

Isto pode ocorrer por vários motivos. Se o preço estiver muito baixo, alguns produtores terão o seu custo de produção acima deste preço e se torna inviável continuar produzindo; outros preferirão produzir outra mercadoria que esteja com preço de venda mais atrativo, etc.

Normalmente, a declividade de uma curva de oferta linear é positiva, isto é, à medida que o preço aumenta, a oferta aumenta e à medida que o preço diminui, a oferta diminui. Em certos casos, a declividade de uma curva de oferta linear pode ser zero, isto é, o preço é constante, independentemente da oferta (reta paralela a Ox).

Em outros casos, a declividade pode ser indefinida, isto é, a oferta é constante, independentemente do preço (reta paralela a Oy).



Nos casos em que a função oferta é positiva é importante determinar sua equação para poder prever o comportamento do mercado.

EXEMPLO RESOLVIDO

Ex 24: *Quando o preço da calculadora financeira Mektref é R$ 120,00, são ofertadas ao mercado 500 unidades do produto. Se o preço sofrer um reajuste de R$ 20,00, são ofertada 600 unidades do produto. Determine a função oferta para admitindo que a mesma seja do primeiro grau.*

Resolução:

Como a função é do primeiro grau do tipo, p = a.q + b, temos que calcular o coeficiente angular **a** e o coeficiente linear **b**.

O Coeficiente angular é dado por:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow a = \frac{140 - 120}{600 - 500} \Rightarrow a = \frac{20}{100} \Rightarrow a = 0{,}2$$

O coeficiente linear é dado por:

$$b = y - a.x \Rightarrow b = 140 - 0{,}2.600 \Rightarrow b = 140 - 120 \Rightarrow b = 20$$

Assim a equação da oferta é p = 0,2q + 20, onde p é o preço e q a quantidade ofertada.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÕES

177. Quando o preço for de R$ 50,00, 50.000 máquinas fotográficas de um determinado tipo estão disponíveis no mercado; quando o preço for de R$ 75,00, 100.000 máquinas estão disponíveis no mercado. Qual é a equação da oferta? Esboce o gráfico dessa curva de oferta sabendo que ela é linear.

178. Quando o preço for de R$ 25,00 nenhuma bola de um determinado tipo está disponível no mercado, enquanto que para cada R$ 10.00 de aumento no preço, 20.000 bolas a mais estão disponíveis. Qual é a equação da oferta, sabendo que a curva é linear?

179. De acordo com os termos de contrato entre a Companhia A e a companhia telefônica, a Companhia A paga à companhia Telefônica R$ 1.000,00 por mês para chamadas a longa distância, com duração de tempo limitada. Qual é a equação da oferta?

180. A forma de uma curva de oferta implica que:

a) Quanto maior o preço, maior será a quantidade demandada;
b) Quanto menor o preço, menor será a quantidade demandada;
c) Quanto maior o preço, maior será a quantidade ofertada;
d) Quanto menor o preço, menor será a quantidade ofertada.

181. Trace a curva de oferta, conforme os preços e quantidades abaixo referentes a um bem qualquer:

Quantidade	55	67	78	85	100
Preço	10	12	14	16	18

182. O dono da fabrica de chocolates Nectar verificou que o preço de um ovo de Páscoa é R$ 65,00, e nesse preço são vendidas 1.500 unidades por mês. Se o preço aumentar para R$ 70,00 ele está disposto a ofertar 1.800 unidades por mês. Determine a função que relaciona o preço y em função da quantidade x de unidades vendidas.

183. Um produtor de hortaliças está disposto a oferta ao mercado 2.000 pés de alfaces quando o preço for R$ 1,20, mas se o preço sofrer um reajuste de R$ 0,10 ele pretende colocar no mercado 2.350 pés de alfaces. Determine quantidade de pés de alfaces ofertadas ao mercado quando o preço for de R$ 1,00.

184. Dada a equação de oferta 3x - 8p + 10 = 0, sendo x em centenas de unidades e p o preço unitário, qual o preço por unidade pelo qual 200 unidades são ofertadas?

185. Quando o preço é R$ 80,00 há 10.000 lâmpadas de um certo tipo disponíveis no mercado. Para cada R$ 10,00 de aumento no preço, 8.000 lâmpadas a mais estão disponíveis no mercado. Supondo linear a equação de oferta, determine:

a) A equação da oferta
b) O gráfico da curva de oferta.

c) A quantidade ofertada quando o preço for de R$ 50,00?

EQUILÍBRIO DO MERCADO

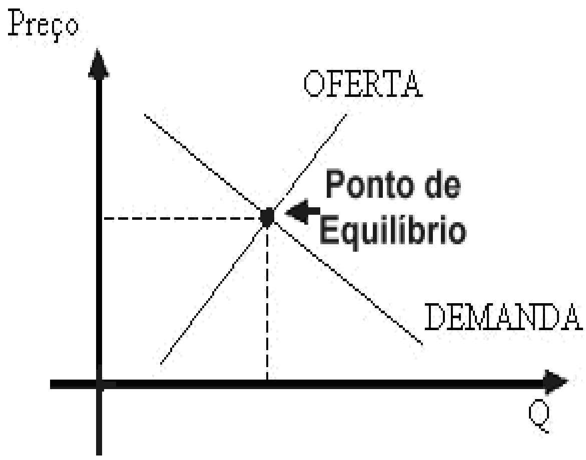
Foi visto que no caso da função de demanda, uma elevação no preço corresponde (geralmente) a uma redução na quantidade demandada e no caso da função de oferta, uma elevação no preço corresponde a uma elevação na quantidade ofertada.

Então, até que nível variará o preço se de um lado, o consumidor deseja preços sempre menores e de outro, o produtor interessa-se por preços sempre maiores?

E a esse preço, quais serão as quantidades consumidas (demanda) e produzidas (oferta)?

Haverá um preço que satisfará, em termos de quantidade, aos consumidores e produtores; é o chamado "preço de equilíbrio".

O "equilíbrio de mercado" ocorre então num ponto no qual a quantidade de um artigo procurado é igual à quantidade oferecida. Portanto, supondo que as mesmas unidades para a quantidade demandada e a quantidade ofertada sejam usadas em ambas as equações (oferta e demanda), a quantidade de equilíbrio e o preço de equilíbrio correspondem às coordenadas do ponto de interseção das curvas de oferta e de demanda.



Algebricamente, as coordenadas desse ponto são encontradas, resolvendo-se o sistema formado pelas equações de oferta e demanda.

Outra maneira prática de calcular o ponto de equilíbrio é igualar a equações de oferta e demanda: *OFERTA = DEMANDA*

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÕES

186. Ache o ponto de equilíbrio para as seguintes equações de oferta e de demanda

a) $p=10-2q$ e $p=\dfrac{3q}{2}+1$

b) $p = 5 - 3q$ e $p = 4q + 12$

c) $p = 10 - 2x$ e $p = 5x + 1$

187. Uma empresa produz um certo produto de tal forma que sua função de oferta diária é $p = 20 + 5x$ e a demanda diária é $p = 110 - 4x$. Determine:

a) O preço para que a quantidade ofertada seja igual a 50;

b) A quantidade vendida quando o preço é R$ 10,00;

c) A quantidade ofertada quando o preço for R$ 50,00

d) O ponto de equilíbrio do mercado;

188. Considerando a função demanda por sorvetes dada por $p = 100 - 0{,}003x$ e a função oferta de sorvetes dada por $p = 0{,}003x + 150$, calcule o preço de equilíbrio para essa situação.

189. O Dono do Açougue Boiadeiro verificou que quando o preço do quilo de carne é R$ 7,00, são vendidos 1.000 kg por dia. Se o preço aumentar para R$ 8,00 o total de quilos vendidos cai para 800 por dia. Por outro lado os donos de frigoríficos, quando o preço da carne está em R$ 7,00 eles oferecem ao mercado 2.000 kg por dia, se o preço aumentar para R$ 8,00 eles oferecem 2.500 kg por dia. Determine a quantidade e o preço de equilíbrio que seja bom para os donos de açougue e para os donos de frigoríficos.

190. Dado o sistema $\begin{cases} y = 5 - 3x \\ y = 4x + 2 \end{cases}$

a) Determine qual das equações expressa curva de oferta;

b) Determine qual expressa curva de demanda;

c) Determine o ponto de equilíbrio;

191. Quando o preço de cada bicicleta é R$ 160,00; então 20 bicicletas são vendidas, mas se o preço é R$ 150,00, então 25 bicicletas são vendidas. Em relação à oferta, quando o preço de cada bicicleta é R$ 200,00, então 20 bicicletas estão disponíveis no mercado; mas quando o preço for R$ 220,00, então 30 bicicletas estão disponíveis no mercado. Nessas condições, determine:

a) A função demanda

b) A quantidade de bicicletas vendidas quando o preço for R$ 100

c) A função oferta

d) A quantidade de bicicletas ofertadas quando o preço for R$ 250,00

e) O ponto de equilíbrio

FUNÇÃO RECEITA TOTAL

É diretamente proporcional à quantidade vendida. É entendida como sendo o produto entre o preço de venda (P_V), pela quantidade vendida (q).

$$R = Pv.q$$

Na atividade operacional de uma empresa, diversos fatores contribuem para a formação da receita proveniente do volume de vendas. Fatores como volume de produção e potencial de mercado não podem ser esquecidas na formação da receita, porém, em pequenos intervalos onde já foram consideradas as variáveis restritivas e considerando-se o preço constante nesse intervalo de produção, o rendimento total da empresa será função somente da quantidade vendida.

Por exemplo, se for tomada uma produtora de caixas registradoras que são vendidas a R$ 80,00 cada, se não for vendida unidade alguma, a Receita será 0; se forem vendidas 100.000 unidades, o rendimento total (receita total) será 8 milhões de reais. Vê-se então que a função receita pode ser uma função linear cujo gráfico é uma reta que passa pela origem e tem como declividade o preço de venda (por unidade).

A função Receita Média é a função que a cada q associa $Rm = \dfrac{R}{q}$, ou seja, a função Receita Média coincide com a função preço de demanda.

FUNÇÃO CUSTO TOTAL

Os custos de empresas são classificados em duas categorias: Custos fixos (C_F) e Custos variáveis (C_V). Os custos fixos permanecem constantes em todos os níveis de produção e incluem comumente fatores tais como aluguel, instalação, equipamentos, etc. Ele permanece constante, independentemente de volume de produção ou de venda. Os custos variáveis são aqueles que variam com a produção e que incluem fatores tais como mão-de-obra, matéria prima utilizada, gastos promocionais, etc.

O custo total (C_T) em qualquer nível de produção é a soma do custo fixo e do custo variável nesse nível de produção.

Chamamos de C_V é o custo variável unitário de produção do bem, de C_F o custo fixo. O custo total (C_T) pela produção de q unidades do referido bem é dado, então, pela equação:

$$C_T(q) = C_F + C_V.q$$

Nesse caso, o custo total é uma função afim da quantidade produzida e seu gráfico é uma reta com declividade positiva.

A função Custo Médio é a função que a cada **q** associa $Cm = \frac{Cf + Cv.q}{q}$.

Tome Nota:

- A diferença entre o preço de venda e o custo variável por unidade é chamada de *margem de contribuição por unidade.*

$$Mcu = P_V - C_V$$

PONTO DE RUPTURA

O ponto P de interseção das curvas C_T (Custo Total) e R (Receita) refere-se ao nível de atividade da empresa em que ela não obtém nem Lucro nem Prejuízo, ou seja, a receita é igual ao custo total. Também chamado de Break Even Point - (ou ponto de nivelamento).

Ele representa também a quantidade na qual o produtor está para romper o equilíbrio - isto é, a quantidade para a qual existe um rendimento suficiente apenas para cobrir os custos. A empresa fará, certamente, todo o esforço necessário para ultrapassar esse ponto, gerando, conseqüentemente, uma parcela de lucro, rompendo essa situação.

Para se obter as coordenadas do Ponto de Nivelamento, basta achar a interseção das curvas R e C_T. Para encontrar a intersecção das curvas basta fazermos R = C.

No caso de funções lineares (retas), o ponto de nivelamento delimita duas regiões: uma à esquerda, representando o Prejuízo (pois para cada q < q.p, o custo total é maior que a receita) e uma à direita, representando o Lucro (pois para cada q > q.p, o custo total é menor que a receita).

FUNÇÃO LUCRO TOTAL

A função lucro é definida por $L = R - C_T$, onde R é a função receita e $\mathbf{C_T}$ a função custo total.

No caso de funções lineares, $L = P_v.q - C_v.q - C_F$, onde $\mathbf{P_V}$ é o preço de venda por unidade, $\mathbf{C_V}$ é o custo variável unitário do produto e $\mathbf{C_F}$ é o custo fixo.

Então, nesse caso, o lucro é uma função (afim) da quantidade vendida (ou fabricada).

Tome Nota:

- Podemos encontrar o ponto de nivelamento fazendo o lucro igual a zero $\rightarrow$ L = 0

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÕES

192. O custo unitário de produção de um bem é R$ 5,00 e o custo associado à produção é R$ 30,00. Se o preço da venda do referido bem é R$ 6,50 determinar:

a) A função custo total;

b) A função receita;

c) A função lucro;

d) O ponto de ruptura;

e) A produção necessária para um lucro de R$ 120,00.

193. Um comerciante teve uma despesa de R$ 230,00 na compra de certa mercadoria. Como vai vender cada unidade por R$ 5,00, o lucro final **L** será dado em função das **x** unidades vendidas. Responda:

a) Qual a lei dessa função **f**;

b) Para que valores de **x** têm f(x) < 0? Como podemos interpretar esse caso?

c) Para que valores de **x** haverá um lucro de R$ 315,00?

d) Para que valores de **x** o lucro será maior que R$ 280,00?

194. Considerando a função demanda por sorvetes dada por $p = 100 - 0{,}005x$ p = 100 – 0,003x e a função oferta de sorvetes dada por $p = 0{,}003x + 200$ p = 0,003x + 150, calcule o preço de equilíbrio para essa situação.

195. Considere as funções R = 3.q e C_T = 6 + q, para $0 \leq q \leq 10$ unidades de determinada utilidade. A função Lucro Total é:

196. Suponha que o custo fixo de produção de um artigo seja de Cr$ 5.000, 00; o custo variável seja de Cr$ 7,50 por unidade e o artigo seja vendido a Cr$ 10,00 por unidade. Qual é a quantidade necessária para se atingir o ponto de equilíbrio?

197. Um fabricante vende seu produto a R$ 25,00 por unidade. Os seus custos fixos estimados em R$ 13.000,00 e os custos variáveis em 40% do rendimento total. Sua capacidade média de produção é 5.000 unidades por mês. Determinar:

a) A função receita;

b) A função custo total;

c) A função lucro;

d) O ponto de ruptura;

e) Qual o lucro obtido na produção e venda de 8.000 unidades?

f) Qual a quantidade vendida se o lucro obtido foi de R$ 20.000,00

198. O custo variável médio (custo unitário) de produção de certo bem é de R$ 12,00 e o custo fixo associado à produção é de R$ 60,00 para quantidades variáveis na faixa de zero a 100 unidades. Se o preço de venda na mesma faixa é de R$ 20,00/unidade, identificar a função custo total (C_T) e a função Receita R(x).

199. Sabendo que a função custo total $C_T = 1200 + 8.q$ está associada à produção de um determinado bem, determine o custo total referente à produção de 230 unidades.

200. Um certo bem tem por equação de demanda $p = 5 - 3q$, onde p é o preço e q a quantidade demandada. Determine a função receita e a função receita média. Qual a receita e a receita média se a quantidade demandada são 40 unidades?

201. Determine o "ponto de nivelamento" em cada caso abaixo.

a) $R = 0,6.q$ $\quad C_T = 2 + 0,5.q \quad 0 \leq q \leq 30$

b) $R = 1,5.q$ $\quad C_T = 4 + 0,5.q \quad 0 \leq q \leq 5$

c) $R = 2.q$ $\quad C_T = 2 + q \quad 0 \leq q \leq 4$

d) $R = 0,4.q$ $\quad C_T = 3 + 0,1.q \quad 0 \leq q \leq 20$

e) $R = 0,05.q$ $\quad C_T = 120 + 0,08.q \quad 0 < q < 120$

202. Considere a função $R_T = 20,5.q$, onde o preço é fixo (R$ 20,50) e "q" é a quantidade de produtos vendidos ($0 \leq q \leq 120$ unidades). Qual a quantidade de produtos vendidos quando a Receita Total atinge o valor de R$ 1.025,00?

203. Sabe-se que a função custo total $C_T = 2000 + 25.q$ está associada à produção de um determinado bem. Qual a produção necessária para se ter um Custo Total de R$ 5.000,00?

204. Na produção de peças, uma indústria tem um custo fixo de R$ 8,00 mais um custo variável de R$ 0,50 por unidade produzida. Sendo x o número de unidades produzidas escreva a lei da função que fornece o custo total de x peças.

205. Considerando a função demanda por sorvetes dada por $p = 100 – 0,003x$ e a função oferta de sorvetes dada por $p = 0,003x + 150$, calcule o preço de equilíbrio para essa situação.

206. Marcos fabrica um determinado produto com um custo fixo de R$ 3,00 e custo variável de R$ 0,60. Sabendo-se que este produto é vendido a R$ 0,80 a unidade, Marcos precisa vender, pelo menos, "q" unidades do produto para não ter prejuízo. Qual o valor de "q"?

207. Considere a função lucro total $L_T = 4.q – 450$, para $0 \leq q \leq 800$ unidades de determinado bem. Qual o Lucro Total referente à produção de 250 unidades deste bem?

FUNÇÃO DEPRECIAÇÃO LINEAR

Depreciação é a diminuição do valor a que estão sujeitos os bens que compõe o ativo fixo das empresas em virtude do desgaste, do envelhecimento, da obsolescência etc.

É, em outras palavras, a diferença entre o preço de compra de um bem e seu valor de troca (valor residual), no fim de certo período.

Pela legislação atual em vigor (decreto nº 58.400, de 10/05/1966), as taxas de depreciação a considerar para alguns fatores foram fixadas em:

- 10% para móveis e utensílios;
- 10% para máquinas e acessórios industriais;
- 20% para veículos;
- 4% para edifícios e outros.

A depreciação é a perda do valor de um bem ao longo do tempo devido ao uso, pelo aparecimento de dispositivos mais atualizados ou por outras razões.

A depreciação é uma função do primeiro grau, decrescente, que pode ser calculada por:

$$D = a.t + b$$

D = depreciação, **a** = coeficiente angular da reta

b = valor do objeto na data zero. **t** = tempo de depreciação

EXEMPLO RESOLVIDO

Ex 25: *Compra-se hoje um automóvel de modelo popular novo, por R$ 19.500,00. Se daqui a seis anos ele estiver valendo apenas $13.650,00, pede-se:*

a) A equação que fornece valor do referido automóvel ao longo do tempo, supondo-a do primeiro grau.

Solução.

Cálculo do coeficiente angular da função.

	x	y	
x_1	0	19.500	y_1
x_2	6	13.650	y_2

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad a = \frac{13\,650 - 19\,500}{6 - 0} = \frac{-5\,850}{6} = -975{,}00$$

Substituindo na fórmula $b = y - a.x$, para o cálculo do coeficiente linear, temos que:

$b = 19.500 - (-975).0 \Rightarrow b = 19.500$

Portanto a função depreciação será:

$D = -975.t + 19.500$

b) O preço do automóvel daqui a dez anos é dado por:

D = – 975t + 19.500 ⇒ D = – 975. 10 +19 500 ⇒ V = 9.750,00

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÕES

208. O valor de um automóvel novo hoje é de R$ 15.000,00. Se daqui a cinco anos seu valor for de apenas R$ 10.000,00, responda:

a) Qual será a sua equação de depreciação? Resposta: d = 1.000x

b) Quanto valerá o automóvel daqui a 10 anos? Resposta: R$ 5.000,00

209. O valor de um dispositivo mecânico para uma certa indústria, custa hoje R$ 7.500,00. Se o período de vida útil do mesmo, na linguagem contábil é de 15 anos, escreva com estas informações a função depreciação e elabore um gráfico representativo da situação, admitindo a depreciação linear. Resposta: d = 500x

210. O valor de um telefone celular dos mais avançados, hoje é de R$ 1.800,00 e daqui a dois anos estará completamente obsoleto, deverá valer R$ 600,00. Admitindo depreciação linear, qual será o valor do celular a 3 anos após a compra? Resposta: nulo

211. O valor de um carro, hoje é de R$ 18. 000,00 e daqui a cinco anos estará valendo R$ 12.000,00. Admitindo depreciação linear, qual será o valor do carro daqui a oito anos? Resposta: R$ 8.400,00

212. Um equipamento de informativa é adquirido por R$ 2.500,00 e após 1,5 anos de uso, seu valor estimado é de R$ 2.200,00. Admitindo a depreciação linear.

a) Escreva a equação que dá o valor do equipamento em qualquer tempo. Resposta: V = 2.500 - 200x

b) Quanto estará valendo o equipamento após três anos? Resposta: R$ 1.900,00

c) Daqui a quanto tempo o equipamento não estará valendo mais nada em termos contábeis? Resposta: 12 anos e 6 meses

FUNÇÃO CONSUMO

A função consumo é quase que assumidamente linear. Se y é a renda disponível, o consumo é função desta, ou seja, C = f(y).

Esta função tem características crescentes, pois quando a renda cresce o consumo também cresce, e quando a renda diminui o consumo também diminui.

Se uma família tem uma despesa fixa **b** e, se são consumidos **a**% da renda disponível, então a função consumo é dada por: $C(x) = a.x + C_0$

- **C_0** = representa as despesas fixas ou consumo autônomo; (coeficiente linear da reta),
- **a** = é chamado de propensão marginal a consumir; (coeficiente angular da reta),
- **C(x)** = representa o consumo propriamente dito;
- **x** = representa a renda disponível.

Desta forma, se uma família possui uma renda disponível x; uma despesa fixa de R$ 1.800,00 e um consumo da renda fixa na ordem de 60% desta, então: $C(x) = 0{,}6.x + 1.800$

Temos então:

» Consumo autônomo = 1800;

» Propensão marginal a consumir 0,6 = 60%;

» Propensão marginal a poupar (1 – 0,6) = 0,4 = 40%.

Tome Nota:

– O que não se consome se investe ou poupa.

FUNÇÃO POUPANÇA

Podemos então definir poupança S(x) como a diferença entre a renda disponível e o consumo.

Assim: $S = x - C \Rightarrow S = x - a.x - C_0 \Rightarrow S = (1-a)x - C_0$, onde:

- **C_0** é o consumo autônomo;
- **a** é a propensão marginal a consumir;
- **(1 – a)** é a propensão marginal a poupar.

Tome Nota

- O fator (1 – a) da função poupança, correspondente ao coeficiente angular da função, é chamado de **propensão marginal a poupar**.
- A propensão **marginal a consumir**, é sempre um número compreendido entre 0 e

1.

EXERCÍCIOS DE APLICAÇÕES

213. Dada a função poupança $S(y) = 0{,}4y - 250$, pede-se:

a) O consumo autônomo;
b) A propensão marginal a consumir;
c) A propensão marginal a poupar;
d) A poupança quando a renda disponível é de R$ 3.500,00;
e) A renda disponível quando são poupados R$ 750,00;

214. Uma família tem um consumo autônomo de R$ 1.200,00 e uma propensão marginal a consumir igual a 0,7. obtenha:

a) A função consumo:
b) A função poupança.
c) Para se obter uma poupança de R$ 800,00, qual deve ser a renda da família?

215. Sendo $C(x) = 900 + 0{,}7x$, a função consumo de uma dentista principiante, pede-se :

a) A função poupança;
b) A renda mínima para que a poupança não seja negativa.

216. A poupança de um professor é dada por $S = -900 + 0{,}45x$, pede-se:

a) Função consumo
b) A renda que induza a um consumo de 1500,00.
c) A quantidade poupada se a renda for de R$ 3.500,00

217. O consumo autônomo de uma família é de R$ 1.800,00. Sabe-se, porém, que são gastos 55% de sua renda disponível. Pede-se:

a) A função consumo;
b) A função poupança;
c) A propensão marginal a poupar;
d) A consumo quando a renda disponível é de R$ 2.000,00;
e) A renda disponível quando o consumo é de R$ 6.200,00;
f) A poupança para uma renda disponível de R$ 4.000,00;

218. Suponha que o que é produzido em uma ilha seja consumido nela própria. Não há gastos com investimentos (visando aumento futuro da capacidade produtiva), nem governo. A função consumo anual é $C = 100 + 0{,}72x$. Qual a renda de equilíbrio (aquela para a qual o que é produzido é consumido)?

219. Suponhamos que uma família tenha uma renda disponível (renda menos os impostos) variável mês a mês, e uma despesa fixa de R$ 1.200,00 por mês. Suponhamos ainda que essa família gaste em consumo de bens e serviços 68,5% de sua renda disponível, alem do valor fixo de R$ 1.200,00. Assim, determine o valor da renda que induz um consumo de R$ 4.500,00.

220. A Funções consumo e poupança de um operário de renda variável x são, respectivamente: $C(x) = 1.000 + 0{,}77x$ e $S = -1.000 + 0{,}23x$. Nessas condições determine:

a) Qual o seu consumo s sua poupança se ele ganhar R$ 480,00?
b) Qual o seu consumo quando sua renda for nula?
c) Quanto deverá ganhar para ter uma poupança de R$ 500,00?

221. Um indivíduo possui mensalmente a sua disposição uma certa quantia. Sabe-se que o mesmo tem uma despesa fixa de R$ 2.800,00, e, é perseguido por uma tendência de gastar 83% do que está ao seu dispor. Nestas condições:

a) Escreva a função consumo deste consumidor.
b) Calcule o seu consumo para uma renda disponível R$ 5.000,00.
c) Represente graficamente a função consumo do indivíduo

222. Numa determinada família, quando a renda é R$ 7.000,00, o consumo é R$ 6.500,00 e, quando a renda é R$ 8.000,00 o consumo é R$ 7.000,00. Admitindo a função consumo como de primeiro grau determine:

a) A função consumo.
b) Qual a renda da família quando o consumo for R$ 10.000,00?
c) Qual o consumo quando a renda da família for de R$ 9.500,00?
d) A função poupança.
e) Qual a renda para que esteja disponível para poupar R$ 2.500,00?
f) Qual a poupança quando a renda disponível for de R$ 5.000,00?

REFERÊNCIAS

ALVES, Sérgio. **A Matemática do GPS**. Revista do Professor de Matemática 59. São Paulo: RPM, 2006

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: E. Blücher/Edusp, 1983.

CUNHA, Félix da. et al. **Matemática Aplicada**. São Paulo: Atlas, 1990.

DANTE, L. ROBERTO. **Matemática: Contexto & Aplicação**. São Paulo: Ática, 1999.

DAVIS, Philip, J. HERSH Reuben. A **Experiência Matemática**. Lisboa: Gradiva, 1995.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. 2. ed. Campinas: UNICAMP, 1997.

FARIA, Sebastião Pereira de. **Cálculo I**. 8ª edição. Mogi das Cruzes-SP: Cop-Set Reproduções Gráficas, 1991.

FLEMMING, Marília. GONÇALVES, Mirian Buss**. Cálculo A: Funções Limites, Derivadas e Integrais**. 6. ed. São Paulo. 2006.

FURTADO, Emerson Marcos. ...et. al. **Ensino Médio, 2ª série**. vol. 1. Curitiba: Positivo, 2007.

GUELLI, Oscar. **Matemática: uma Aventura do Pensamento**. São Paulo: Àtica, 1998.

IEZZI, Gelson. ...et. al. **Fundamentos de Matemática Elementar**. vol 8. São Paulo: Atual, 1985.

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo, com geometria analítica**. São Paulo: Harbra, 1977.

__________. **Matemática Aplicada à Economia e Administração**. São Paulo: Harbra, 1988.

LONGEN, Adilson. **Matemática Ensino Médio**. Curitiba: Positivo, 2004.

MORETTIN, Pedro A. BUSSAB, Wilton O. HAZZAN Samuel. **Cálculo: Funções de uma Variável**. 3 ed. São Paulo: Atual, 1999.

PAIVA, Manoel. **Matemática: volume único**. 2. ed. São Paulo: Moderna, 2003.

RESENDE, Severino Miranda. **Apostila de Matemática II**. 2006. Disponível em: www.fecea.br/download/APOSTILA%20II.doc. Acessado em 30/07/2009

ROSA, Ernesto. **Limites uma Proposta Didática**. Disponível em: www.matinterativa.com.br/artigos/Limites.doc. Acessado em 29/09/2009

SILVA, Sebastião Medeiros da. SILVA, Elio Medeiros da. SILVA, Ermes Medeiros da. **Matemática para os cursos de Economia, Administração e Ciências Contábeis**. 4.ed. v.2. São Paulo: Atlas, 1999.
__________. **Matemática para os cursos de Economia Administração e Ciências**

Contábeis. 5. ed. vol. 1, São Paulo: Atlas, 1999.

__________. **Matemática Básica para Cursos Superiores**. São Paulo: Atlas, 2002.

SMOLE, Kátia Cristina Stocco. VIEIRA DINIZ, Maria Inez de Souza. **Matemática Ensino Médio** – 2º Série. vol.2. 5. ed. São Paulo: Saraiva, 2005

SODRÉ. Ulysses. **Matemática Essencial para o ensino Fundamental, Médio e Superior**. Disponível em: http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/ Acessado em 25/06/2009

STEWART, James. **Cálculo, volume I**. 5ª edição. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

TAKARA, Enzo Marcon. **Problemas e Equações do Primeiro Grau**. Disponível em: www.angloabc.com.br/cursinho/exclusivo/enzo/6.doc. Acessado em 10/08/2009

TAHAN, Malba. **O Homem que Calculava**. 41. ed. Rio de Janeiro: Record, 1995.

TAN, S.T. **Matemática Aplicada à Administração e Economia**. São Paulo: Thomson, 2001.

VERAS, Lília Ladeira. **Matemática Aplicada à Economia**. 3. ed. São Paulo: Atlas, 1999.

WEBER, JEAN E. **Matemática Para Economia e Administração**: São Paulo: Harbra, 1977.